UNIVERSIDADE DE LISBOA

FACULDADE DE CIÊNCIAS

Secção Autónoma de História e Filosofia das Ciências

SOBRE O CONHECIMENTO E A DIFUSÃO DAS OBRAS DE ARQUIMEDES EM PORTUGAL

Natércia Maria Fernandes Soares

Dissertação

Mestrado em História e Filosofia das Ciências

2014

UNIVERSIDADE DE LISBOA

FACULDADE DE CIÊNCIAS

Secção Autónoma de História e Filosofia das Ciências

SOBRE O CONHECIMENTO E A DIFUSÃO DAS OBRAS DE ARQUIMEDES EM PORTUGAL

Natércia Maria Fernandes Soares

Dissertação

Mestrado em História e Filosofia das Ciências

Orientador

Prof. Doutor Henrique José Sampaio Soares de Sousa Leitão

2014

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos Professores do Departamento de Matemática da FCTUC que leccionaram a disciplina de "História da Matemática" da Licenciatura em Matemática na década de 80 e me deram a possibilidade de participar, não só naquelas aulas mas também de aceder aos textos de apoio. Este foi o ponto de partida para, ao longo do tempo, ter a necessária motivação para participar em Escolas de Verão ou Congressos relacionados com essa temática.

Ao longo da minha carreira profissional tive o privilégio de desenvolver com amigos e colegas da ESDD, no âmbito do projecto da Escola Cultural, múltiplas actividades, algumas delas em contexto inter-disciplinar e relacionadas com história da matemática. A esses amigos, que continuam presentes, agradeço o incentivo para a realização deste trabalho.

Terminada a docência da disciplina de Matemática no Ensino Secundário, senti que poderia iniciar um estudo organizado no campo da História da Ciência. Admitida neste Mestrado, agradeço a todos os Professores do curso pela forma como estruturaram a parte curricular e, por isso, sempre me deram motivos para continuar. Um reconhecimento especial ao Professor Doutor Henrique Leitão que se disponibilizou para ser o meu orientador, mas também pela ideia que me permitiu apreciar o pensamento de Arquimedes e desenvolver este trabalho. É meu dever acrescentar a sua dedicação e rigor, materiais disponibilizados e orientação ao longo de todo o ano.

Agradeço também à Professora Doutora Carlota Simões que há algum tempo me facultou os ficheiros com as imagens dos "Azulejos Euclidianos", e que algumas delas uso neste trabalho.

À minha família, obrigada pelo inestimável apoio.

O meu agradecimento estende-se aos amigos de sempre.

RESUMO

No século XVI a obra de Arquimedes foi divulgada e estudada na Europa. Alguns dos trabalhos tiveram uma ampla divulgação, conduziram ao debate entre matemáticos e ao ensino de alguns temas na Universidade. O conhecimento do pensamento de Arquimedes implicou romper com a tradição medieval e uma nova cultura científica começou a ser construída. Foi um marco na história da matemática.

Este trabalho pretende mostrar que a difusão do conhecimento arquimediano, em Portugal, teve diversos canais. Primeiro, individualmente, dois matemáticos de Quinhentos escreveram obras onde revelaram o conhecimento dos textos de Arquimedes. Essas obras foram um contributo único para a divulgação do maior matemático da Antiguidade no nosso país, mas também na Europa.

Mais tarde, no contexto escolar, mostraremos que os jesuítas e as estruturas de ensino que dirigiram tiveram uma acção decisiva na difusão da obra de Arquimedes em Portugal.

ABSTRACT

In the sixteenth century the work of Archimedes became known and studied all over Europe. Some of his works had a wide dissemination, which led to the debate among mathematicians and to the teaching of some subjects at the University. The knowledge of Archimedes' thought implied a break with the medieval tradition and a new scientific culture started to be built. It was a milestone in the history of mathematics.

This study aims to show that the diffusion of Archimedean knowledge, in Portugal, had several channels. First, individually, two mathematicians in sixteenth-Century wrote some works which revealed a deep knowledge of the texts of Archimedes. These works were a unique contribution to the dissemination of the greatest mathematician of antiquity in our own country as well as in Europe.

Later, in the school context, we will show that the Jesuits and the educational institutions that they ran had a crucial impact in the spreading of the work of Archimedes in Portugal.

PALAVRAS CHAVE

Arquimedes, Jesuítas, Matemática, Portugal, Difusão.

KEY WORDS

Archimedes, Jesuits, Mathematics, Portugal, Diffusion.

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

Reconhecido como o mais destacado matemático da Antiguidade, Arquimedes construiu uma obra notável que hoje conhecemos em grande parte. É muito provável que no final do período helénico a sua obra fosse mais extensa, alguns dos seus textos ter-se-ão perdido e, posteriormente, outros poderão ter sido objecto de alterações diversas. Se é certo que em relação ao legado científico existem lacunas, também é verdade que sobre a sua vida conhecemos poucos detalhes.

Na história da matemática, a obra de Arquimedes tem particular destaque. Constituída por diferentes tratados, foi pioneira em alguns dos temas que desenvolveu, inovadora noutros, mas igualmente admirável e surpreendente pela metodologia seguida. Depois de Arquimedes, a ciência físico-matemática teve profundas alterações − as propriedades dos objectos passam a ser demonstradas com o rigor geométrico; a interpretação qualitativa deu lugar à prova quantitativa, o método experimental associado ao cálculo permitiu o acesso à resolução de problemas pelo método científico.

No século XVI, os trabalhos de Arquimedes adquirem uma enorme importância. Segundo Alexandre Koyré, até se pode dizer que o trabalho científico do século XVI pode resumir-se na recepção e compreensão gradual da obra de Arquimedes. As traduções diversas dos textos do sábio siracusano deram lugar à primeira edição impressa que circulou na Europa, para no Renascimento surgirem versões em vernáculo. Esse conhecimento, difundido entre os estudiosos e em círculos cada vez mais alargados, marcou, indelevelmente, a ruptura com o pensamento medieval.

Alguns dos tratados tiveram uma divulgação mais alargada do que outros. Umas vezes encontramos um geómetra inovador ao abordar problemas nunca antes estudados, resolvendo-os quer geometricamente, quer mecanicamente; noutras notamos que aplicou e desenvolveu o conhecimento de antecessores para demonstrar resultados de importância crucial na história da Ciência. A influência arquimediana ganhou dimensão na nova física, através da cultura renascentista.

A situação europeia já é relativamente bem conhecida. Mas, e em Portugal? Como é que as obras de Arquimedes foram difundidas? De que modo chegaram a Portugal? Quais foram os canais de circulação dos textos arquimedianos em Portugal? Como é que o conhecimento de Arquimedes foi transmitido? Esse processo de difusão, em

Portugal e na Europa, caminharam lado a lado? Estas são algumas das questões a que nos propomos responder nesta dissertação.

No século XVI, em Portugal, as novas ideias culturais que emergiam na Europa, fazem-se sentir por via do movimento de escolarização de bolseiros que frequentavam Universidades de Espanha e sobretudo de França. Nas Ciências, temos os casos de dois divulgadores de Arquimedes no Portugal de Quinhentos que destacamos no nosso trabalho − autores de obras, que pela originalidade e conteúdo científico, atestam o contributo decisivo para o conhecimento de Arquimedes.

Numa fase posterior, novos actores estarão presentes no panorama científico português através da criação de instituições de ensino médio.

O estudo de assuntos da matemática, no contexto português, irá conhecer desenvolvimentos notáveis. A conjunção de circunstâncias únicas determinará o impulso de um novo ensino da matemática e de temas arquimedianos. Os estudos estarão mais centrados e organizados em cursos próprios de instituições pré-universitárias, frequentados por elevado número de alunos. Por conseguinte, os resultados iriam surgir a partir do século XVIII − professores portugueses bem formados, manuais em língua nacional acessíveis a estudantes melhor preparados. Em suma, os contributos são assinaláveis para a difusão, no meio escolar, do conhecimento matemático, incluindo temas arquimedianos. Assiste-se a uma importante democratização e, por isso, à expansão do conhecimento científico.

Neste trabalho, na primeira parte, decidimos fazer uma breve digressão por cada um dos tratados atribuídos a Arquimedes, tecer algumas considerações aos seus conteúdos e, referir, sempre que conveniente, aspectos significativos e inovadores da obra. Isto é, numa primeira fase tentamos familiarizar-nos com a obra arquimediana − temas e metodologias desenvolvidas pelo matemático siracusano. Ainda no primeiro capítulo, procuramos seguir o rasto dos seus textos até chegarem ao nosso conhecimento.

Mas, para responder às questões centrais deste trabalho, focamos, no segundo capítulo, aspectos específicos da transmissão em Portugal. Inicialmente, a qualidade científica de certos personagens permitiu a divulgação em meios restritos. Depois chega a intervenção dos jesuítas e a colaboração de professores estrangeiros em instituições de ensino. Apesar de alguns constrangimentos, na primeira metade do século XVIII, a divulgação de Arquimedes é visível através de textos matemáticos produzidos por portugueses, mas também pela expressão artística colocada ao serviço da Educação.

CAPÍTULO 1

ARQUIMEDES DE SIRACUSA: UM FÍSICO-MATEMÁTICO IMPROVÁVEL NO SÉCULO III A.C.

1.1. Arquimedes: breves dados biográficos

A matemática na Grécia Antiga teve um desenvolvimento notável no período helenístico. Durante este período várias foram as personalidades que viveram, destacando-se no plano científico o físico-matemático Arquimedes. Este é um facto histórico inquestionável, fundamentado nos dados de que dispomos. Mas, a reconstrução do passado científico Greco-Romano não é uma tarefa fácil. A manifesta falta de elementos não nos permite ter o conhecimento necessário à análise daquele período histórico. Isto é, a escassez de fontes dificulta a reconstrução daquele passado fundamentada na prova documental. Além disso, existem os mitos de diversas espécies que podem ser um factor perturbador para escrever a história da Ciência.

No caso de Arquimedes, o desconhecimento de factos e provas levou a que se criassem alguns mitos inofensivos transmitidos pelos primeiros historiadores. Em geral, traduzindo ideias preconcebidas, esses mitos têm repercussões no conhecimento da ciência e da sua história. Contudo, existirá alguma componente verdadeira, por exemplo, a inteligência de Arquimedes, valorizada e enaltecida, nos primeiros textos conhecidos sobre a história da Antiga Grécia.

A impossibilidade de recuperar totalmente o passado, segundo Kostas Gavroglu, vai para além da falta de elementos e documentos, pois aquele estudo do passado dependerá também da interpretação presente dos actuais historiadores.

Sabe-se, pelas narrativas que chegaram aos nossos dias, que o contacto dos antigos gregos com outras civilizações, em particular com a escola de Alexandria, possibilitou a troca de conhecimento permitindo aos sábios daquele tempo alcançar resultados surpreendentes. Arquimedes foi um desses sábios a beneficiar da influência e da partilha com outros génios da "ciência".

Sobre Arquimedes os dados disponíveis para estabelecer um percurso biográfico são escassos. Uma biografia escrita pelo seu amigo Heracleides perdeu-se[1] e, assim, o conhecimento relativo à sua vida é lacunar. Este aspecto justificará que uma parte do

[1] Heath, *The Works of Archimedes,* Dover Publications, New York, 2002, p. xv.

que se escreve sobre Arquimedes inclua algumas lendas entre os aspectos que caracterizam o personagem que viveu no século III a.C.

A mais antiga fonte biográfica é a transmitida pelo historiador da Grécia Antiga − Políbio (c. 203 a.C. - 120 a.C.). Na sua obra *Histórias* descreveu e analisou os factos, por ordem cronológica, de um período de tempo que incluiu parte da época de Arquimedes.

Sabemos que Arquimedes nasceu em Siracusa, na época uma importante cidade-estado grega na Sicília. O historiador bizantino João Tzetzes (c.1110 - 1180) dá-nos a conhecer alguns dados biográficos de Arquimedes, nomeadamente indica que o matemático terá vivido cerca de setenta e cinco anos e terá sido morto em 212 a.C., durante a Segunda Guerra Púnica, no cerco de Siracusa[2]. É deste modo que se conclui ser 287 a.C. o ano provável de nascimento.

Arquimedes, numa das suas obras, ao referir a razão entre os diâmetros do Sol e da Lua, afirma ter sido seu pai, o astrónomo Fídias, a calculá-la. Não são conhecidas outras relações familiares próximas, sendo excepção o relato de Plutarco (c. 46 - 120 d.C.), historiador de origem grega, na sua obra *Vida de Marcelo*. Plutarco escreveu sobre alguns acontecimentos políticos e culturais de Siracusa, informando-nos ser Arquimedes parente e amigo do Rei Herão II e de seu filho Gelon[3].

É dado como certo que estudou em Alexandria, considerado um importante centro de cultura helenística no Egipto. Contactou com discípulos de Euclides, foi aí contemporâneo do matemático e bibliotecário Eratóstenes de Cirene (276 a.C. - 194 a.C.), do matemático e astrónomo Conon de Samos (c. 280. a.C. - c. 220 a.C.) e do matemático Dositeu (c. século III a.C.)[4]. Depois dos seus estudos, regressou a Siracusa para se dedicar inteiramente à matemática e onde terá escrito a maior parte das suas obras. No entanto, terá mantido ligações pessoais com Conon, por quem tinha elevada consideração e aproveitava para lhe enviar os trabalhos antes de os publicar. Correspondia-se também com Eratóstenes, a quem enviou um dos seus tratados, e com Dositeu − um discípulo de Conon −, depois da morte deste[5].

---

[2] Heath, *The Works of Archimedes*, p. xv.

[3] Dijksterhuis, *Archimedes*, Ejnar Munjsgaard, Copenhagen, 1956, pp. 11-12.

[4] Heath, *The Works of Archimedes*, p. xvi.

[5] Marshall Clagett, «Archimedes», *in: Biographical Dictionary of Mathematicians*, Vol. 1, The American Council of Learned Societies, USA, 1991, p. 85.

Sobre a morte de Arquimedes são conhecidas diferentes versões[6], no entanto, todas apontam para ter sido assassinado por um soldado romano[7].

Figura 1 - Mosaico sobre Arquimedes interrompido por um soldado romano.

(*in* www.greciantiga.org/img.asp?num=0302)

Segundo Tzetzes, apesar das ordens de que ele não deveria ser prejudicado, foi morto por um soldado quando estava concentrado na resolução de um problema. Certo é que o cidadão Arquimedes foi esquecido pelos seus conterrâneos após a sua morte. O filósofo, escritor e político romano Cícero (106 a.C. - 43 a.C.), foi encontrar, muitos anos mais tarde, o túmulo de Arquimedes, tal como refere no Livro V da sua obra *Tusculanas*[8]:

> Ao tempo em que eu era questor, encontrei o seu sepulcro – ignorado dos Siracusanos, que negavam mesmo a sua existência – rodeado de sebes e coberto de silvado.

Cícero teria conhecimento de que Arquimedes pedira para que no seu túmulo fosse colocado um cilindro circunscrevendo uma esfera e a inscrição da relação entre os

---

[6] Dijksterhuis, *Archimedes*, pp. 30-32.

[7] Marshall Clagett, «Archimedes», *in: Biographical Dictionary of Mathematicians*, p. 85.

[8] Virgínia Soares Pereira, «Cícero e a descoberta do túmulo de Arquimedes», *in: Boletim de Estudos Clássicos* - 44 (Dezembro/2005), pp. 75−84 *in* http://www.uc.pt/fluc/eclassicos/publicacoes/ficheiros/BEC44/06virginiasoares [10 Janeiro 2014]. Neste artigo, a autora defende que Cícero é um "Exímio contador de histórias, curioso arqueólogo ocasional e claramente orgulhoso do seu feito por ter identificado o túmulo de Arquimedes" (p. 83). A autora inclui a tradução (p. 77) de um extracto de as *Tusculanas* (45 a. C.), de que fizemos a transcrição.

respectivos volumes – talvez a sua demonstração favorita[9]. Assim, ao procurar o túmulo encontrou «uma pequena coluna, que não sobressaía muito dos arbustos, sobre a qual estava a figura da esfera e um cilindro» e a inscrição estava na face anterior do pedestal[10].

A reprodução anterior de um mosaico alusiva à morte de Arquimedes é um exemplo de objectos encontrados, que podem ajudar à compreensão do passado, principalmente nos casos da informação ser escassa.

Mas, o conhecimento que temos de Arquimedes tem origem em duas vias distintas − os textos de antigos historiadores sobre os acontecimentos, combinando factos e lendas e a transmissão das suas próprias obras −, constatando-se que, em qualquer caso, existem dificuldades.

1.2. Arquimedes matemático − as obras

Na história da ciência, Arquimedes ocupa um lugar de destaque pelos seus trabalhos de matemática. É considerado um dos maiores geómetras de todos os tempos.

As suas obras foram divulgadas entre os estudiosos da Europa, mas o seu conteúdo nem sempre era compreendido, não só pela complexidade de alguns dos seus tratados mas também porque requeriam outros conhecimentos, por exemplo, de os *Elementos* de Euclides. De acordo com esta possibilidade, o reconhecimento do valor científico do matemático siracusano poderá ter sido tardio, como poderemos inferir da citação, em 1654, do padre Tacquet[11]:

> aqueles que o louvam são mais numerosos do que os que o lêem, e os que o admiram mais numerosos do que os que o compreendem.

Das obras que chegaram até aos nossos dias faremos uma breve apresentação, destacando alguns dos aspectos do pensamento matemático de Arquimedes.

É de realçar que os seus trabalhos continuam a suscitar o estudo dos especialistas, com destaque para alguns recentemente redescobertos.

---

[9] Michel Authier, «Arquimedes: o cânone do sábio», *in Elementos para uma História das Ciências, I. da Babilónia à Idade Média*, Terramar Editores, Lisboa, 1995, p. 151.

[10] Marshall Clagett, «Archimedes», *in: Biographical Dictionary of Mathematicians*, p. 85.

[11] Michel Authier, «Arquimedes: o cânone do sábio», p. 128.

De acordo com referências feitas por Arquimedes nos diferentes tratados conhecidos, Heath defende que a ordem cronológica em que as obras foram escritas poderá ter sido a seguinte[12]:

(1) *Sobre o equilíbrio dos planos, Livro I* (*De planorum aequilibriis I*)

(2) *Quadratura da parábola* (*Quadratura parabolae*)

(3) *Sobre o equilíbrio dos planos, Livro II* (*De planorum aequilibriis II*)

(4) *O método dos teoremas mecânicos* (*De mechanicis propositionibus*)

(5) *Sobre a esfera e o cilindro, Livros I e II* (*De sphaera et cylindro*)

(6) *Sobre as espirais* (*De lineis spiralibus*)

(7) *Sobre conóides e esferóides* (*De conoidibus et sphaeroidibus*)

(8) *Sobre os corpos flutuantes, Livros I e II* (*De corporibus fluitantibus*)

(9) *Medida do círculo* (*Dimensio circuli*)

(10) *O contador de areia* (*Arenarius*)

Além destes trabalhos, sabe-se que Arquimedes escreveu outras obras de que hoje existem apenas em fragmentos. É o caso de *O problema bovino* (*Problema bovinum*) e o *Stomachion* (*Loculus Archimedius*). Outros autores mencionam manuscritos árabes onde são referidos trabalhos com os títulos de *Livro de Lemas* (*Liber assumptorum*)[13] e *Sobre a divisão do círculo em sete partes iguais*. Há também referências a trabalhos sobre mecânica que podem ser considerados versões preliminares de, por exemplo, *Sobre o equilíbrio dos planos*[14].

Papo de Alexandria (século III) mencionou, pela primeira vez, na sua obra *Colecção Matemática* os treze sólidos arquimedianos que atribuiu ao siracusano, apresentando as primeiras representações conhecidas[15]. Contudo, Arquimedes não os refere em qualquer das suas obras.

---

[12] Heath, *Archimedes*, Society for Promoting Christian Knowledge, Londres, 1920, p. 26. (Versão electrónica *in* https://archive.org/details/archimedes00heatuoft). As designações latinas das obras podem ser consultadas em Dijksterhuis, *Archimedes*, Copenhagen, 1956, pp. 46-47.

[13] Este trabalho não deverá ser de Arquimedes, uma vez que no texto aparece referido o seu nome, *in* Marshall Clagett, «Archimedes», p. 87.

[14] Marshall Clagett, «Archimedes», p. 87.

[15] Papo identificou cada um dos poliedros arquimedianos, cujas faces são polígonos regulares, *in* http://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Solids/Pappus.html [15 Janeiro 2014]

1.3. Características gerais das obras e métodos de demonstração usados

Arquimedes escreveu no dialecto dórico, cujas influências se foram desvanecendo, com o passar dos tempos e as múltiplas traduções e interpretações dos seus textos. Em quase todas as obras, à excepção de *O contador de areia*, foram introduzidas alterações e acréscimos por alguém familiarizado com aquele dialecto. Em uma data posterior à de Eutócio de Áscalon (c. 480 - c. 540), um comentador arquimediano, os livros *Sobre a esfera e o cilindro* e *Medida do círculo*, foram completamente reformulados[16]. As diversas traduções para o Árabe, Latim e Inglês contribuíram também para alterações e interpretações nos textos originais das obras.

Vários dos tratados de Arquimedes começam com cartas dirigidas a matemáticos, que, em alguns casos, conhecia pessoalmente. Esses documentos revelam-se como vestígios da existência de trocas científicas na região – é o caso, por exemplo, da carta-introdução a *Sobre a esfera e o cilindro* dirigida a Conon, considerado um amigo e grande matemático. Também enviou cartas para Eratóstenes com os trabalhos *O método de teoremas mecânicos* e *O problema bovino* ou para Dositeu com a *Quadratura da parábola*.

Essa prática do matemático siracusano adquiriu particular significado: conduziu ao registo dos textos do matemático numa correspondência privada entre intelectuais do Mediterrâneo. Não se sabe quando, esses documentos passaram ao domínio público para se transformarem em tratados de Arquimedes[17].

Poderemos, então inferir que o matemático de Siracusa não teve a preocupação de escrever livros didácticos que sistematizassem as suas descobertas[18] e preferiu, utilizando métodos inovadores, dar as suas próprias demonstrações matemáticas, umas para resultados geométricos dos seus antecessores e outras para temas originais. A compreensão das suas obras dependia de se estar familiarizado com Euclides[19], bem como de outros geómetras, por exemplo, Eudoxo de Cnido (408 a.C. - 355 a.C.).

O estudo de áreas e volumes de figuras geométricas era uma das principais actividades matemáticas das civilizações antigas, como mostram os chamados problemas de quadratura e cubatura. Os Gregos, em particular, desenvolveram as suas

---

[16] Heath, *The Works of Archimedes,* p. xxxvi.

[17] Reviel Netz, *The works of Archimedes*, Vol.1, University Press, Cambridge, 2004, p.14.

[18] Heath, *Archimedes*, p. 24.

[19] Dijksterhuis, *Archimedes*, p. 49.

próprias técnicas para essas questões. Arquimedes, em vários dos seus tratados – *Quadratura da parábola*, *Sobre a esfera e o cilindro*, *Medida do círculo*, *Sobre conóides e esferóides* e *Sobre as espirais* – ocupou-se com teoremas sobre áreas e volumes de figuras limitadas por curvas[20]. Para a demonstração de alguns desses teoremas, aplicou e desenvolveu o conhecimento matemático transmitido por obras de antecessores, em particular, Eudoxo, o primeiro a inventar um processo de cálculo de áreas, acessível aos que conheciam o Livro XII de Euclides. Referimo-nos ao designado "método de exaustão"[21], aplicado em conjunção com um resultado, hoje conhecido por axioma de Arquimedes[22]:

> de duas grandezas desiguais, a maior excede a menor por uma grandeza tal que a operação de adição com ela própria pode ser feita de modo a exceder qualquer grandeza dada entre as que são comparáveis com ela e com outras.

O método de exaustão dos Gregos, designado de "passagem indirecta para o limite" por Dijksterhuis, consiste numa demonstração por uma dupla redução ao absurdo e podia apresentar diferentes formas, sendo as principais: o método da compressão e o método da aproximação[23].

O primeiro, mais usado, depende da construção de polígonos (pirâmides) inscritos e circunscritos à figura de que se pretende determinar a área (volume). Depois desta primeira etapa, este método da compressão, pode assumir dois procedimentos diferentes: da diferença ou da razão decrescentes.

Pelo método da diferença, para demonstrar um teorema que possa ser traduzido por uma proposição do tipo $A=B$, onde A é a área (volume) da figura curvilínea e B a área (volume) da figura rectilínea conhecida, prova-se que, quer $A>B$, quer $A<B$, conduz a uma contradição. Isto é, para o caso de se supor que $A>B$, seguindo o processo de exaustão com o axioma referido, podem construir-se sucessivas figuras (rectilíneas e regulares) inscritas de área (volume) I_n, tais que, para cada uma delas, $I_n > B$. Mas, é claro que para cada uma das figuras inscritas, I_n tem de ser menor do que B. Daqui resulta uma contradição, então a hipótese é falsa. De modo análogo, no

---

[20] Marshall Clagett, «Archimedes», p. 86.

[21] O termo "exaustão" é proposto pela primeira vez (1647) pelo professor jesuíta, Gregório de S. Vicente, *in* Dirk J. Struik, *História Concisa das Matemáticas*, 1ª edição, Gradiva, Lisboa, 1989, p. 86.

[22] Dijksterhuis, *Archimedes*, p. 148.

[23] Marshall Clagett, «Archimedes», p. 88.

caso de $A<B$, poder-se-ão construir sucessivas figuras circunscritas de área (volume) C_n, tais que, para cada uma delas, $C_n < B$. Por outro lado, cada uma das figuras circunscritas tem de ser maior que B, o que é contra a hipótese. Conjugando os dois casos anteriores, por um duplo absurdo, tem de verificar-se $A=B$. Arquimedes usou este método, em particular, na proposição 1 da *Medida do círculo*, mostrando que a área do círculo está compreendida entre as áreas dos polígonos que lhe são inscritos e circunscritos, até que a diferença entre elas seja menor do que um certo valor. Numa linguagem moderna, diríamos que, no limite, essa diferença seria nula.

O método da exaustão, no procedimento em que se usa a razão, é semelhante ao da diferença. Na primeira parte, supomos $A>B$, isto é, a figura curvilínea tem maior área (volume) do que a da figura rectilínea conhecida. Pelo método de exaustão, constroem-se figuras circunscritas, cada uma delas com áreas (volumes) C_n e figuras inscritas, cada uma delas com áreas (volumes) I_n. A razão, para um certo n, entre C_n e I_n vai decrescendo até que seja menor do que a razão entre a área (volume) da figura dada e a da figura conhecida. Na segunda parte, $A<B$, a razão entre a área (volume) de cada uma das figuras circunscritas C_n, e a de cada uma das figuras inscritas, I_n vai decrescendo até que seja menor que a razão entre a área (volume) da figura conhecida e a da figura dada. Em cada uma das partes será mostrada uma contradição, o que leva a ter de se verificar $A=B$. Numa linguagem moderna diríamos que no limite, a razão entre as figuras circunscritas e inscritas tende para a unidade. Este processo é usado, por exemplo, na proposição 14 do Livro I de *Sobre a esfera e o cilindro*[24].

Arquimedes usou o método de aproximação, mas apenas em a *Quadratura da parábola*, proposições 18 a 24, para determinar a área de um segmento de parábola. Este problema será por nós desenvolvido no ponto 1.4.2.

Por esta metodologia − método de exaustão −, foi possível ao matemático siracusano estabelecer várias fórmulas matemáticas para o cálculo de áreas e volumes, sendo, no entanto, de referir que essas fórmulas não eram conhecidas tal como hoje as escrevemos, mas eram enunciadas na forma de proporções. Por exemplo: os comprimentos de duas circunferências estão entre si como os diâmetros respectivos.

[24] Dijksterhuis, *Archimedes*, pp. 130-132.

Note-se, ainda, que o método da exaustão apenas possibilitava demonstrar um teorema na forma $A=B$, através de um raciocínio heurístico, mas não permitia explicar como o resultado tinha sido descoberto, questão que Arquimedes aprofundou em *O Método*.

Sabemos que, para resolver problemas de geometria, as regras euclidianas só permitiam o uso de compasso e régua não graduada, contudo, em alguns teoremas relativos a áreas e volumes, Arquimedes, usou também um artifício grego especial conhecido por *neusis*[25]. Em geral, uma construção por *neusis* consiste em inserir um segmento de recta de comprimento pré-definido entre duas linhas ou curvas[26], de tal modo que passe por um ponto dado e intersecte essas linhas ou curvas[27]. Esta foi uma técnica importante usada em demonstrações sobre tangentes a uma espiral, nomeadamente, na proposição 18 de *Sobre as espirais*, a partir da qual, Arquimedes obteve a quadratura do círculo.

1.4. As obras e alguns aspectos do seu conteúdo

1.4.1. *Sobre o equilíbrio dos planos*

Esta é uma obra em que Arquimedes se revela como pioneiro ao investigar temas nunca antes abordados pelos seus antecessores, tendo relacionado a matemática com a mecânica[28]. Pelas ideias aí desenvolvidas, o tratado ficou também conhecido por estudar os centros de gravidade de figuras planas[29].

Escreveu este tratado em dois volumes, supondo-se que o Livro I tenha sido a primeira obra que Arquimedes compôs. Nele começou por apresentar sete postulados respeitantes às situações de equilíbrio para pesos iguais ou diferentes, bem como ao lugar ocupado pelo centro de gravidade de figuras planas iguais e semelhantes. Depois, demonstrou quinze proposições e calculou o centro de gravidade de várias figuras

---

[25] Marshall Clagett, «Archimedes», p. 87.

[26] John Conway também designa estas construções por construções fraudulentas ou marginais, *in O Livro dos Números*, Gradiva / Universidade de Aveiro, 1ª edição, Outubro de 1999, Lisboa, p. 211.

[27] Heath, *The Works of Archimedes*, p. c.

[28] Dijksterhuis, *Archimedes*, p. 286.

[29] Arquimedes nunca define "centro de gravidade", conceito comum entre os Gregos, *in* Sherman Stein, *Archimedes, What did he do besides cry Eureka?*, The Mathematical Association of America, USA, 1999, p. 15.

geométricas, tais como triângulos, paralelogramos e trapézios. Em particular, na proposição 10, demonstrou que o centro de gravidade de um paralelogramo é o ponto de intersecção das suas diagonais. É interessante notar que para esta proposição apresentou duas propostas de demonstração, uma recorrendo a resultados obtidos anteriormente e na outra apenas invocou um dos postulados enunciados − postulado 4. Provou também (proposição 13) que o centro de gravidade de qualquer triângulo é, usando termos actuais, o ponto de intersecção das medianas do triângulo. A prova é feita por dois processos alternativos, sendo um deles exemplo do método de exaustão, que o siracusano tão frequentemente usou.

Arquimedes, neste tratado, explicou a lei da alavanca, apesar de não ter sido o primeiro a usá-la. Na proposição 3, numa formulação moderna, afirma: "As grandezas estão em equilíbrio a distâncias inversamente proporcionais aos seus pesos".

No Livro II as dez proposições que o constituem são inteiramente dedicadas a segmentos de parábola – regiões limitadas por um arco de parábola e uma corda. Arquimedes na proposição 8 deu um resultado importante sobre a posição que ocupa o centro de gravidade de um segmento de parábola e aplicou resultados do trabalho *Quadratura da parábola*, escrito antes do Livro II.

1.4.2. *Quadratura da parábola*

Este é o primeiro tratado que Arquimedes enviou a Dositeu, como se pode inferir pela carta-prefácio. Começa por elogiar o amigo Conon e, do seu ponto de vista, grande matemático, a quem costumava enviar as suas investigações. Mas Conon tinha morrido e, por isso, Arquimedes decidiu mandar este trabalho a Dositeu que também estava familiarizado com questões de geometria.

Assim, enviou-lhe a sua solução para o problema de encontrar a área[30] de uma figura limitada por uma curva – um segmento de parábola. Para essa demonstração, diz Arquimedes que vai usar dois processos, o primeiro recorrendo aos métodos da mecânica e outro, por meio de propriedades da geometria, invocando resultados

[30] A expressão "encontrar a área" significava, no tempo de Arquimedes, exprimir essa área em função da área de um polígono, tal como acontece na proposição 14 e 24 da *Quadratura da parábola*.

anteriores de outros geómetras, tais como a relação entre o volume do cilindro e do cone, com a mesma altura e a mesma base, provada por Eudoxo[31].

Depois das palavras de apresentação deste trabalho, Arquimedes enunciou várias proposições, obtendo os resultados parciais necessários, que lhe permitiram dar a demonstração mecânica da propriedade − proposição 17 − da área de um segmento de parábola[32].

Importa agora dedicar alguma atenção à segunda parte deste tratado que inclui a prova geométrica daquela propriedade. Para esta demonstração, o matemático começou por definir base, altura e vértice de um segmento de parábola.

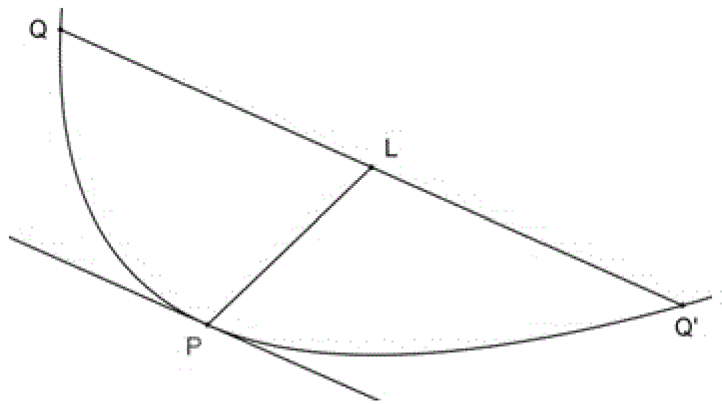


Figura 2 − Segmento de parábola PQQ', de base QQ' e vértice P[33].

Estes termos tinham já sido usados em proposições anteriores, mas, para os clarificar consideremos a figura 2, onde se representa, parcialmente, uma parábola e dois dos seus pontos, Q e Q'.

O segmento de recta QQ' chama-se corda e a parte da parábola limitada por aqueles pontos é um arco de parábola. A região limitada pelo arco de parábola e a corda é designada por segmento de parábola, PQQ'.

À corda chama-se base do segmento de parábola; o ponto P sobre o arco de parábola no qual a tangente à curva é paralela à corda diz-se o vértice do segmento; a altura é o maior segmento perpendicular traçado do arco de parábola para a base.

[31] Heath, *Archimedes,* p. 43.

[32] Desta demonstração daremos conta ao apresentar uma breve síntese do trabalho *O método*, uma vez que Arquimedes explica aí o processo que utilizou para concluir o resultado.

[33] As figuras 2 a 13 foram criadas com o software GeoGebra 4.4.

A questão da área de um segmento de parábola, em termos geométricos – um dos resultados tão surpreendentes quanto célebres de Arquimedes –, é tratada na proposição 24 que, actualmente, poderia ser enunciada na seguinte forma[34]:

> Seja P o vértice de um segmento de parábola de base QQ'. Então, a área do segmento de parábola PQQ' é igual a quatro terços da área do triângulo que tem a mesma base do segmento e a mesma altura.

Simbolicamente:

$$\text{área do segmento de parábola } PQQ' = \frac{4}{3} \text{ área do triângulo } [PQQ'].$$

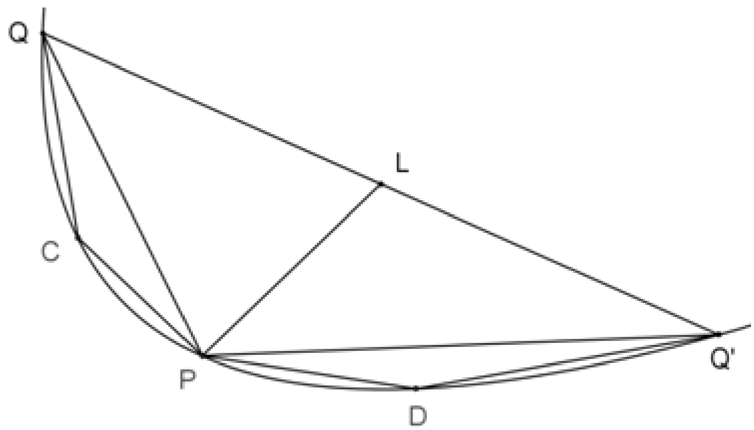


Figura 3

A ideia de Arquimedes para demonstrar esta proposição consistiu em encontrar a área do segmento de parábola por sucessivas aproximações das áreas de polígonos com um dos lados coincidente com a base do segmento de parábola, sendo os restantes vértices pontos do arco de parábola, obtidos por um processo iterativo. Assim, na primeira etapa, a área do segmento de parábola PQQ', aproximada por um valor inferior, é a área do triângulo $[PQQ']$, inscrito no segmento de parábola[35], sendo P o vértice do segmento de parábola. Designe-se essa área por A_1.

[34] Heath, *The Works of Archimedes*, p. 251.

[35] Para encontrar o ponto P traça-se uma paralela ao eixo da parábola que passe pelo ponto médio do segmento QQ'.

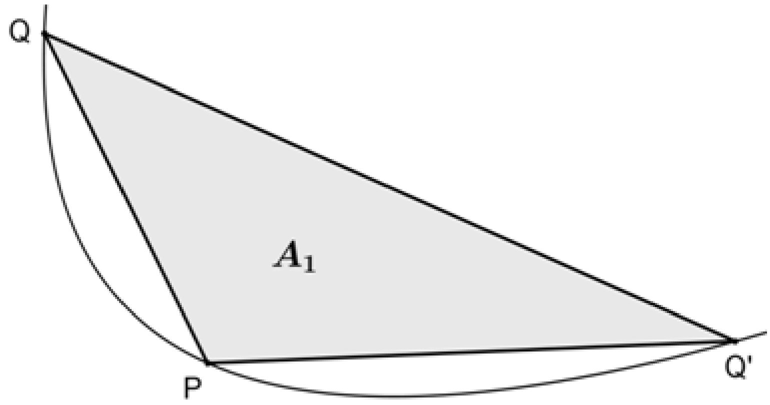


Figura 4

Na fase seguinte, os dois lados do triângulo $[PQQ']$ diferentes da base do segmento de parábola, dão origem a dois segmentos de parábola, menores e, inscreva-se um triângulo em cada um deles − $[PQC]$ e $[PQ'D]$ (Figura 5). Designe-se por A_2 a soma das áreas destes triângulos.

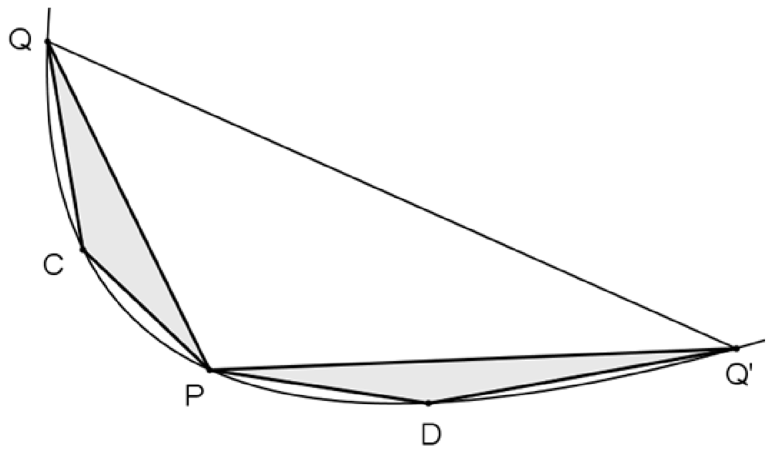


Figura 5 − A soma das áreas das regiões sombreadas é A_2

Então, a área do segmento de parábola PQQ' é, por defeito, $A_1 + A_2$, ou seja a área do polígono $[QCPDQ']$ cujos vértices pertencem ao arco de parábola.

Na proposição 21 deste tratado, Arquimedes provou que, nas condições da figura 5, a área do triângulo $[PQQ']$ é oito vezes a área de cada um dos triângulos mais pequenos − $[PQC]$ ou $[PQ'D]$. Assim, pode concluir-se que:

$$A_2 = \frac{1}{4} A_1.$$

Então, para a segunda aproximação da área do segmento de parábola obtemos a expressão:

$$A_1 + A_2 = A_1 + \frac{1}{4} A_1 = \left(1 + \frac{1}{4}\right) A_1 .$$

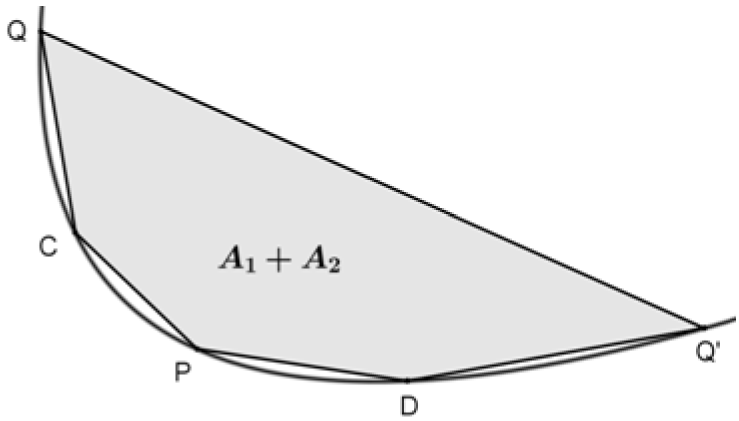


Figura 6

O processo será sucessivamente repetido, verificando-se que a cada um dos segmentos de parábola que se obtêm corresponderão dois novos triângulos.

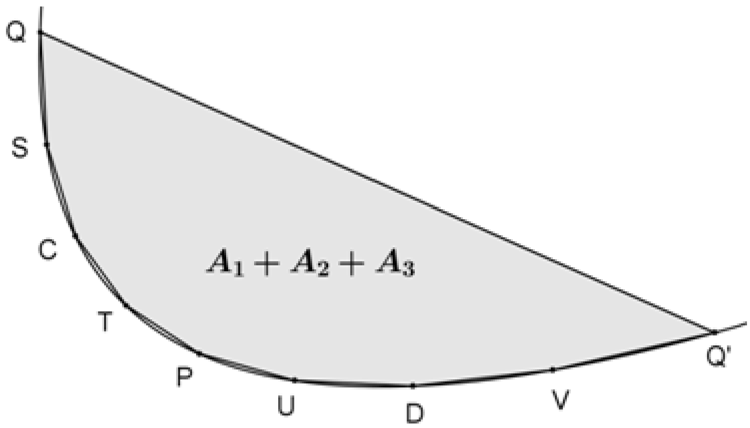


Figura 7

Além disso, a soma das áreas respectivas é $\frac{1}{4}$ da área do triângulo inscrito no segmento de parábola. Assim, numa terceira aproximação seria necessário calcular:

$$A_1 + A_2 + A_3 = A_1 + \frac{1}{4} A_1 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} A_1\right) = A_1 + \frac{1}{4} A_1 + \frac{1}{4^2} A_1 = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2}\right) A_1 .$$

Generalizando, pode afirmar-se que a área do segmento da parábola vai ser aproximada, sucessivamente, por valores inferiores, correspondentes às áreas de polígonos de 3, 5, 9,…lados, até que se obtenha um polígono inscrito de área igual à do próprio segmento de parábola. Numa linguagem moderna dir-se-ia que no limite a diferença entre as áreas desse polígono e do segmento de parábola aproxima-se de zero.

Para o cálculo da área do polígono na *n-ésima* iteração, Arquimedes precisou de determinar o valor da soma de uma série geométrica convergente, com termos de razão $\frac{1}{4}$. Obteve esse resultado na proposição 23 deste tratado, usando-o, pela primeira vez na história do cálculo, para concluir que[36]:

$$A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n = A_1 + \frac{1}{4} A_1 + \frac{1}{4^2} A_1 + ... + \frac{1}{4^{n-1}} A_1$$

$$= \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{4^{n-1}}\right) A_1 = \left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}\right) A_1 \; .$$

Em linguagem simbólica moderna, diríamos que no limite, se obtém o seguinte resultado:

$$A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n = \frac{4}{3} A_1 .$$

Mas, Arquimedes, valorizando os métodos geométricos para obter a necessária prova absoluta, confirmou o resultado recorrendo à demonstração pelo método da exaustão[37].

Assim, recordemos o resultado a provar:

$$\text{área do segmento de parábola } PQQ' = \frac{4}{3} \text{ área do triângulo } [PQQ'].$$

Para a demonstração, o matemático grego começou por supor:

$$K = \frac{4}{3} \text{ área do triângulo } [PQQ'].$$

[36] Heath, *The Works of Archimedes*, pp. 249-250.

[37] Heath, *Archimedes*, pp. 43-44.

Primeira parte:

suponhamos que a área do segmento de parábola é maior do que K.

Se inscrevermos no segmento de parábola, sucessivamente, triângulos pelo mesmo processo anteriormente descrito, obtêm-se segmentos de parábola cuja soma das áreas é menor do que a diferença entre a área do segmento de parábola e K (corolário da proposição 20). Portanto o polígono inscrito que se obtém deverá ter uma área maior do que K, o que vai contra o resultado $A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_n = \frac{4}{3} A_1$.

Logo, a área do segmento de parábola não pode ser maior do que K.

Segunda parte:

suponhamos que a área do segmento de parábola é menor do que K.

Se considerarmos a área do triângulo $[PQQ'] = A_1$, $A_2 = \frac{1}{4} A_1$, $A_3 = \frac{1}{4} A_2$ e assim sucessivamente, até uma área A_i, de tal modo que esta seja inferior à diferença entre K e a área do segmento de parábola, teremos:

$$A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_i + \frac{1}{3} A_i = \frac{4}{3} A_1 = K .$$

Assim, uma vez que K excede $A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_i$ por uma área menor do que A_i e a área do segmento de parábola por uma área maior do que A_i, pode concluir-se que:

$$A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_i > \text{área do segmento de parábola} ,$$

o que é impossível, uma vez que aquela soma tem de ser menor do que a área do segmento de parábola. Logo, a área do segmento de parábola não pode ser menor do que K.

Conclusão, uma vez que a área do segmento de parábola não pode ser maior nem menor do que K, pelo método de exaustão, tem de verificar-se:

$$\text{área do segmento de parábola } PQQ' = K = \frac{4}{3} \text{ área do triângulo } [PQQ'].$$

Arquimedes estabeleceu o resultado para a área de um segmento de parábola cerca de 1900 anos antes do surgimento do cálculo moderno, isto é, segundo alguns matemáticos e historiadores, foi pioneiro ao usar a soma de séries infinitas.

1.4.3. *O método dos teoremas mecânicos*

Este é um dos tratados de Arquimedes mais importantes e que se considerava perdido até à redescoberta em 1906. Foi recuperado em Constantinopla pelo filólogo e historiador dinamarquês Johan Ludvig Heiberg (1854 - 1928).

Heiberg, professor de Filologia Clássica na Universidade de Copenhaga, de 1896 até 1924, publicou, entre outras, uma edição de os *Elementos* de Euclides e uma edição do *Almagesto* de Ptolomeu**.** No entanto, ficou célebre pela sua descoberta do "palimpsesto Arquimedes". Estudou, minuciosamente o palimpsesto, para concluir que se tratava de um texto novo de Arquimedes. Deve-se a este estudioso a publicação de duas edições das obras de Arquimedes (1880 e 1912) e, com a ajuda de fotografias do palimpsesto, conseguiu ler a maior parte daquele texto arquimediano.

O prefácio desta obra em forma de carta dirigida a Eratóstenes é mais uma clara evidência das trocas científicas naquela região. De facto, o siracusano começou por referir que ainda não tinha recebido as demonstrações para os enunciados que noutra ocasião já tinha enviado a Eratóstenes e, por isso, enviava as suas próprias demonstrações.

Pode considerar-se que esta obra é um testemunho sobre a forma como os Gregos, e Arquimedes em particular, enfrentavam algumas questões de análise matemática. O matemático, neste trabalho, esclareceu como descobriu alguns teoremas sobre a quadratura e a cubatura, chamando a atenção para a diferença entre a intuição para a verdade de um certo teorema e a prova propriamente dita em termos rigorosos, através da qual ficava convencido da sua veracidade[38].

Também prometia acrescentar as indicações necessárias para uma prova geométrica rigorosa dos dois principais teoremas enunciados na carta. Mas uma das demonstrações geométricas está perdida, e nos fragmentos da outra, pode inferir-se que o método subjacente era o método da exaustão[39].

Arquimedes estava convencido de que um método mecânico podia ajudar a encontrar a prova para certas proposições matemáticas e, por isso, o comunicava ao seu amigo Eratóstenes para que pudesse também aplicá-lo. Assim, revelou como descobriu, pelo método da alavanca, os teoremas sobre a área e o volume da esfera – por exemplo, a

[38] Dijksterhuis, *Archimedes*, p. 315.

[39] Heath, *The Works of Archimedes*, nota de introdução ao *The Method of Archimedes*, p. 7.

relação entre o volume de uma esfera e o volume do cone de altura igual ao raio da esfera e base igual ao círculo maior da esfera. Mais tarde demonstraria esses teoremas, por métodos exclusivamente geométricos, em *Sobre a esfera e o cilindro*[40]. Todavia, Arquimedes alertava para o facto de o método poder ser inadequado para demonstrações geométricas rigorosas. Esta referência podia ser um sinal da necessidade de ser cauteloso no que respeita à soma de elementos infinitesimais. De facto, mostrou que o método de dividir uma figura em um número infinito de partes, infinitamente pequenas, podia ser usado para determinar a área e o volume de uma figura. Por outro lado, Arquimedes talvez tenha considerado que este método carecia de suficiente rigor, pelo que terá recorrido ao método da exaustão para chegar aos mesmos resultados.

Neste trabalho, Arquimedes faz referência a Demócrito como autor da descoberta do teorema que assume a relação entre os volumes da pirâmide e do cone ser um terço dos volumes de um prisma e de um cilindro, respectivamente, com a base e altura iguais. Esta declaração é ainda mais interessante por o próprio dizer em *Sobre a esfera e o cilindro* que tal se devia a Eudoxo. No entanto, aqui distingue entre o primeiro a demonstrar tal facto – Eudoxo –, do primeiro a apresentar o resultado sem demonstração – Demócrito[41].

A primeira proposição desta obra, com recurso ao método mecânico, é precisamente a demonstração do resultado que relaciona a área de um segmento de parábola e a área do triângulo nele inscrito, enunciado na obra *Quadratura da Parábola*. Isto é, essa proposição de *O método* pode ser formulada do seguinte modo:

> a área do segmento de parábola ABC é equivalente a quatro terços da área do triângulo $[ABC]$ nele inscrito.

Para a demonstração consideremos a figura 8, de acordo com o descrito no tratado[42].

Sejam ABC o segmento de parábola e D o ponto médio da base AC. Traçando por D o segmento DE paralelo ao eixo da parábola, obtém-se o ponto B que é o vértice do segmento de parábola e constroem-se os segmentos de recta AB e BC.

[40] Marshall Clagett, «Archimedes», p. 92.

[41] Heath, *The Works of Archimedes*, nota de introdução ao *The Method of Archimedes*, p. 10.

[42] Arquimedes, *The Method in* Heath, *The Works of Archimedes*, pp. 15-18.

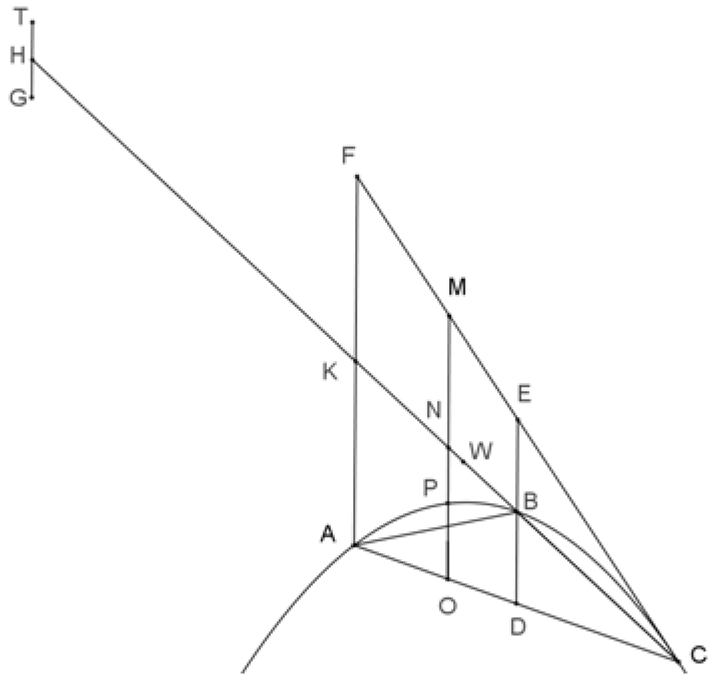


Figura 8 − Modelo para demonstrar mecanicamente a quadratura da parábola

No triângulo $[ACF]$, o lado FC está sobre a tangente à parábola em C e FA é paralelo a DE. Prolongando CB, encontra-se o ponto K sobre o lado AF e, por novo prolongamento, considera-se o ponto H, de tal modo que $HK = KC$. O segmento CH representa o braço de uma balança, onde K é, por construção, o respectivo ponto médio.

Seja o ponto O um ponto qualquer pelo qual se traça MO, paralelo a DE, que intersecta CF em M, CK em N e o arco de parábola em P.

Por uma propriedade das cónicas[43], demonstrada por outros geómetras, por exemplo Euclides, verifica-se[44] $EB = BD$. Além disso, e porque FA e MO são paralelos a DE, tem-se $FK = KA$ e $MN = NO$.

[43] Arquimedes dá este resultado sem demonstração em a *Quadratura da parábola*, proposição 2, *in* Heath, *The Works of Archimedes*, p. 235.

[44] Por uma questão de simplificação de escrita, sempre que não haja perigo de confusão, usaremos a notação EB para "medida de comprimento EB" em vez da habitual $\overline{EB}$.

Considerando a propriedade 5 de a *Quadratura da parábola* e a proposição 2 do Livro VI de os *Elementos* de Euclides[45], pode então afirmar-se que:

$$\frac{MO}{OP}=\frac{CA}{AO} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{MO}{OP}=\frac{CK}{KN} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{MO}{OP}=\frac{HK}{KN}.$$

Seja TG congruente com OP, sendo H o centro de gravidade e, por conseguinte, $TH=HG$. Também sabemos que N é o centro de gravidade do segmento MO e $\frac{MO}{TG}=\frac{HK}{KN}$, donde se conclui que TG e MO estão em equilíbrio em torno do ponto médio de CH − o ponto K.

O mesmo raciocínio pode ser aplicado para todas as outras paralelas a DE e que intersectam o segmento de parábola ABC, verificando-se que para o centro de gravidade H, os segmentos obtidos estão em equilíbrio em torno de K. Ou seja, K é o centro de gravidade do sistema formado por todos os segmentos do tipo de MO − constituem o triângulo $[ACF]$ − e por todos os segmentos colocados em H congruentes com segmentos do tipo de OP − constituem o segmento de parábola ABC.

Assim, teríamos uma alavanca em equilíbrio, sendo K o fulcro, em que os braços CK e HK suspenderiam, respectivamente, o triângulo $[ACF]$ e o segmento de parábola ABC.

Arquimedes provou, em *Sobre o equilíbrio dos planos*, (Livro I, proposição 15), que o centro de gravidade de um triângulo, neste caso o triângulo $[ACF]$, é um ponto W tal que $CK=3\,KW$. Assim, verifica-se:

$$\frac{\text{Área do triângulo}[ACF]}{\text{Área do segmento de parábola}\,ABC}=\frac{HK}{KW}=\frac{3}{1}.$$

Logo, a área do segmento de parábola $ABC=\frac{1}{3}$área do triângulo$[ACF]$.

[45] O enunciado da proposição 2 do Livro VI de os *Elementos* de Euclides pode ser enunciada do seguinte modo: se traçarmos uma recta paralela a um dos lados de um triângulo, essa recta intersecta proporcionalmente os lados desse triângulo. *In Les oeuvres d' Euclide*, Livrairie Scientifique et Technique, Paris, 1993, p. 141.

Mas, atendendo a que $AF = 2 \times DE$, podem-se relacionar as áreas dos triângulos $[ACF]$ e $[ABC]$ do seguinte modo:

$$\text{área do triângulo}\,[ACF] = 4 \times \text{área do triângulo}\,[ABC].$$

Por fim, conclui-se, como se pretendia, que:

$$\text{área do segmento de parábola}\; ABC = \frac{4}{3}\,\text{área do triângulo}\,[ABC].$$

Deste modo, isto é, pelo método mecânico que Arquimedes descreve na carta para Eratóstenes, o matemático intuiu como poderia relacionar as áreas do segmento de parábola e do triângulo inscrito, nas condições apresentadas. A demonstração rigorosa, em termos puramente geométricos, foi a dada em *a Quadratura da parábola*, fazendo uso do método dos indivisíveis[46].

Este trabalho de Arquimedes assume uma particular importância por ser o único em que um matemático da Antiguidade explica como chegou à descoberta dos seus teoremas. Em suma, transmite-nos em *O método* o raciocínio que desenvolveu para obter resultados geométricos, aplicando a lei da alavanca e o conceito de centro de gravidade de figuras geométricas. Além disso, na opinião de alguns historiadores da matemática, aplicou conceitos que se aproximam dos actuais de cálculo infinitesimal.

É ainda de salientar que na carta que enviou a Eratóstenes com o tratado, Arquimedes falava da vantagem que encontrou no seu método mecânico para a matemática mas também da utilidade do mesmo para uma utilização futura na descoberta de outros teoremas que não lhe tenham ocorrido[47]. Podemos, assim, inferir que o matemático grego tinha a preocupação de transmitir a outros o seu conhecimento e, ao mesmo tempo, acreditava que pelos seus métodos seria possível obter novos desenvolvimentos dos seus próprios estudos.

1.4.4. *Sobre a esfera e o cilindro*

Neste tratado em dois livros, Arquimedes voltou a dirigir-se a Dositeu, enviando-lhe as demonstrações de vários teoremas que antes tinham sido apenas enunciados.

[46] Dijksterhuis, *Archimedes*, p. 336.

[47] Arquimedes, *The Method*, *in* Heath, *The Works of Archimedes*, p. 14.

Acrescentou, na introdução ao Livro I, que deveriam ser divulgadas entre os matemáticos que tivessem a capacidade de as analisar e de dar uma opinião.

No início do tratado deu as definições e enunciou os axiomas que vão ser usados nas demonstrações seguintes.

Nas seis primeiras proposições do Livro I, Arquimedes reuniu as informações sobre áreas de figuras no plano e que nas proposições seguintes vai usar para áreas de sólidos. No final da proposição 12 tinha a possibilidade de estabelecer uma relação entre as áreas laterais de uma pirâmide inscritas e circunscritas a um cone[48].

Continuou o tratado com proposições sobre áreas e volumes das figuras inscritas e circunscritas à esfera que são, respectivamente, menores e maiores do que a área e o volume da esfera. Nessas provas recorreu ao método da exaustão.

No Livro I, as proposições 33 e 34 são mais um exemplo da tradição grega, fazendo comparações entre áreas de figuras (volumes de sólidos). As demonstrações que apresentou baseiam-se no princípio de redução ao absurdo. Na sequência destas proposições, e considerando uma qualquer esfera de raio r, enunciou um corolário que lhe permitiu afirmar que o volume do cilindro, cuja base é o círculo maior da esfera e a altura é igual ao diâmetro da esfera, é uma vez e meia (sesquialtera) o volume da esfera.

Esta propriedade confirma as expressões para os volumes da esfera e do cilindro, que hoje usamos, em notação moderna:

$$\text{Volume da esfera } = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{e} \quad \text{Volume do cilindro } = 2\pi r^3.$$

No mesmo corolário indicou que a área total do cilindro é uma vez e meia a área da superfície esférica[49].

As sete primeiras proposições do Livro II são apresentadas na forma de problemas. Por exemplo, para resolver o problema 1 – encontrar uma esfera cujo volume seja igual ao de um dado cone ou cilindro –, partiu do problema resolvido e assumiu como solucionada a questão dos dois meios proporcionais[50].

É nesta obra que Arquimedes obteve a relação entre os volumes de uma esfera e de um cilindro circunscrito com a mesma altura e o mesmo diâmetro – resultado pelo qual,

---

[48] Heath, *The Works of Archimedes*, p.16.

[49] *Ibidem*, pp. 39-44.

[50] *Ibidem*, pp. 57-58. O problema dos dois meios proporcionais consiste no seguinte: dados a e $b \in \mathbb{R}$, determinar x e $y \in \mathbb{R}$, tais que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$. Os valores de x e y são univocamente determinados por equações de 3º grau.

provavelmente, mais se orgulhava e terá manifestado a vontade de que ficasse gravado no seu túmulo. Isto é, naquelas condições, a esfera tem um volume que é dois terços do volume do cilindro circunscrito.

1.4.5. *Sobre as espirais*

No prefácio deste tratado com vinte e oito proposições, Arquimedes dirigia-se a Dositeu e, de novo, fez referência a Conon e às demonstrações que pretendia publicar. Tal aconteceria depois de as apresentar a outras pessoas esclarecidas em matemática e que também as pudessem investigar. As demonstrações a que se refere dizem respeito a proposições sobre a esfera e conóides, algumas delas já enunciadas por Heracleides[51].

Ainda no prefácio, o siracusano falava do hábito de enviar enunciados de teoremas, sem as demonstrações, para Conon, mas agora que este tinha morrido, iria analisá-los um a um, pois entre eles haveria dois que são falsos. Esta ideia de Arquimedes servia de alerta para aqueles que queriam demonstrar tudo, pois poderiam ser refutados por quererem descobrir o impossível.

Arquimedes dedicou esta obra a um tipo de problemas que nada tinham em comum com os anteriores[52]. Começou por apresentar onze proposições introdutórias, das quais salientamos as que têm o número 5, 6 e 7 por usar, nas respectivas demonstrações, a construção *neusis*[53].

Na segunda parte desta obra começa por dar algumas definições, sendo a primeira a de espiral. Por ter sido a primeira pessoa a defini-la, ficou conhecida por espiral de Arquimedes[54] − um dos primeiros exemplos de uma curva mecânica, isto é, uma curva traçada por um ponto em movimento (Figura 9).

Numa linguagem moderna, podemos dizer que é o lugar geométrico dos pontos (B) correspondentes às posições de um ponto (P) que se move a velocidade constante numa recta que gira a velocidade angular constante em torno de um ponto fixo (O)[55].

[51] Heath, *The Works of Archimedes*, p. 152.

[52] *Ibidem*, p. 154.

[53] *Ibidem*, p. c.

[54] Sherman Stein, *Archimedes, What did he do besides cry Eureka?*, p. 77.

[55] Heath, *Archimedes*, p. 42.

Através desta espiral, Arquimedes conseguiu efectuar uma quadratura do círculo, dado que a utilizou para rectificar a circunferência[56]. Com esse objectivo, começou por enunciar e provar algumas propriedades geométricas da espiral, e na proposição 18 deu um processo para obter um segmento congruente com o comprimento da circunferência, e, por conseguinte, obteve um modo de quadrar o círculo.

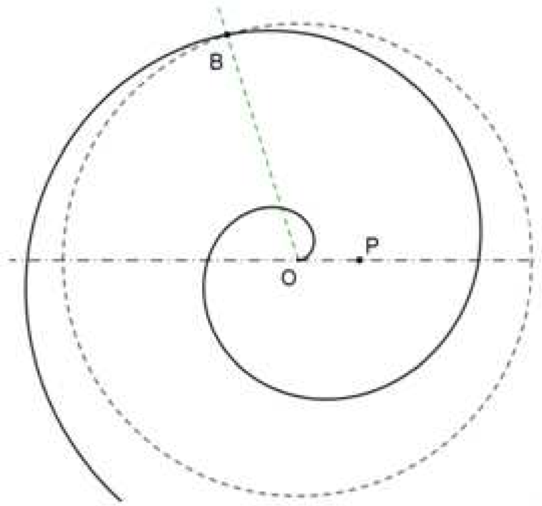


Figura 9 − Espiral de Arquimedes

Se usarmos a linguagem simbólica moderna da matemática, a espiral de Arquimedes, usando coordenadas polares, (r,θ), é a curva que pode ser definida pela equação:

$r = a\,\theta$, onde a é uma constante.

1.4.6. *Sobre conóides e esferóides*

Estamos perante um trabalho novamente destinado a Dositeu, em que na carta-prefácio Arquimedes confessava que, em tentativas anteriores, tinha falhado nas investigações, e que agora enviava as descobertas por ter estudado o assunto com mais cuidado – áreas e volumes das secções de cones, esferas, e parabolóides. Segundo Heath, o texto deste prefácio e as definições do tratado foram encontrados numa versão do Grego que pode ser representativa da terminologia original usada pelo matemático[57].

Começou por definir conóides e esferóides salientando que os conóides podem ser de dois tipos resultantes, um da revolução de uma parábola e o outro da revolução de uma

[56] Dijksterhuis, *Archimedes*, p. 268.

[57] Heath, *The Works of Archimedes*, nota de rodapé da p. 99.

hipérbole. Os esferóides também são dois, obtidos pela revolução de uma elipse, um em torno do eixo maior e o outro em torno do seu eixo menor.

As questões específicas deste tratado começam com as proposições 19, 20, onde recorrendo a proposições anteriores deu os passos necessários para o cálculo dos volumes dos segmentos das figuras inscritas e circunscritas ao sólido considerado.

Em todas as demonstrações aplicou o método de exaustão, provando que a diferença entre os volumes dos sólidos circunscritos e inscritos podia ser menor do que qualquer volume dado.

Nas proposições 21 e 22, demonstrou que o volume de um parabolóide de revolução é $\frac{3}{2}$ do volume do cone com a mesma base e o mesmo eixo[58]. Na parte final da obra tratou a questão do volume de um segmento de um esferóide, analisando diferentes casos que dependem do modo como um plano intersecta o esferóide.

O processo usado por Arquimedes para a determinação dessas áreas e volumes faz lembrar a técnica usada no cálculo integral – dividir continuamente um sólido em partes iguais por planos paralelos. Esta é a razão pela qual muitas vezes é apontado como precursor do cálculo infinitesimal.

1.4.7. *Sobre os corpos flutuantes*

Esta obra foi reencontrada no "palimpsesto de Arquimedes" em 1906, na única cópia conhecida, em grego. Anteriormente o texto existia numa tradução latina.

Um trabalho em dois livros que, segundo Dijksterhuis, merece toda a admiração dos matemáticos de hoje, não só pelos resultados obtidos há cerca de vinte e três séculos, mas também pela forma habilidosa como os argumenta[59].

Neste tratado, considera Stein, Arquimedes deu início a uma nova disciplina – a arquitectura naval. Por um lado, aplicou os conhecimentos de geometria e, por outro lado, usou uma certa intuição da física, que desenvolveu com perícia.

Arquimedes invocou proposições do seu livro *Sobre conóides e esferóides*, utilizou propriedades sobre o centro de gravidade de um parabolóide, sustentando a sua análise também em quatro princípios da física.

---

[58] Heath, *The Works of Archimedes*, pp. 129-131.

[59] Sherman Stein, *Archimedes, What did he do besides cry Eureka?*, p. 65.

O tratado *Sobre os corpos flutuantes* é constituído por dois Livros. No Livro I aparece enunciada a proposição 7, que corresponde ao designado princípio da flutuabilidade de Arquimedes ou princípio da hidrostática:

> Qualquer corpo total ou parcialmente imerso em um fluido experimenta uma força para cima igual, mas em sentido oposto, ao peso do fluido deslocado.

Este princípio, segundo Heath, pode ser visto como o enquadramento teórico para a solução para o problema da coroa[60]. A história associada a este problema foi relatada por Vitrúvio, arquitecto romano do século I a.C., no seu *Tratado de Arquitectura*[61].

Este problema despertou particular interesse na primeira metade do século XVI, e será por nós mais detalhado no Capítulo 2.

No Livro II do referido tratado, Arquimedes calculou as posições de equilíbrio de secções de parabolóides recorrendo a métodos da geometria. Estas investigações correspondem provavelmente a uma idealização das formas dos cascos dos navios. Analisou as causas que levam os barcos a flutuar e procurou determinar a percentagem do navio que ficava acima da água quando flutua em um líquido.

As questões abordadas neste trabalho revelam uma pesquisa muito completa de Arquimedes sobre a flutuabilidade de um ponto de vista teórico e que seria retomado no Renascimento, em particular, por Galileu.

1.4.8. *Medida do círculo*

Trata-se de uma obra pouco extensa que, conforme o que chegou até nós, consiste em apenas três proposições. Pelas diversas traduções e edições de que foi alvo o tratado, pode ter sido muito alterado em relação ao original, mas por outro lado foi muito popular e teve grande divulgação. As diferentes versões do documento circularam nos séculos XIII, XIV e XV e, segundo Clagett, têm origem na tradução latina[62].

Neste trabalho, o matemático sem qualquer introdução ou outra explicação, começou com o enunciado e demonstração de um dos mais importantes resultados da geometria

[60] Heath, *The Works of Archimedes*, pp. 259-261.

[61] Vitrúvio, *Tratado de Arquitectura*, Instituto Superior Técnico, Lisboa, 2009, Livro IX, Preâmbulo 9-12, pp. 327-328.

[62] Marshall Clagett, *Archimedes in the middle Ages*, Vol. 1, The University of Wisconsin Press, Madison, 1964, p. 59.

elementar, atendendo à sua aplicabilidade. Numa linguagem actual, a Proposição 1, pode ser enunciada desta forma:

> Qualquer círculo é equivalente a um triângulo rectângulo em que um cateto é igual ao raio do círculo e o outro é igual ao comprimento da circunferência do círculo.

Esta proposição transmite não só um processo de calcular a área de um círculo, mas também, de forma implícita, traduz a possibilidade de rectificar uma circunferência, questão que está directamente relacionada com o problema da determinação da constante de proporcionalidade entre o comprimento de uma circunferência e o respectivo diâmetro.

Para a demonstração da proposição consideremos a figura 10. Pretendemos provar que a área do círculo $ABCD$ é igual à área do triângulo, K, nas condições acima apresentadas. Isto é, de forma simplificada temos de provar "$\text{área do círculo} = K$".

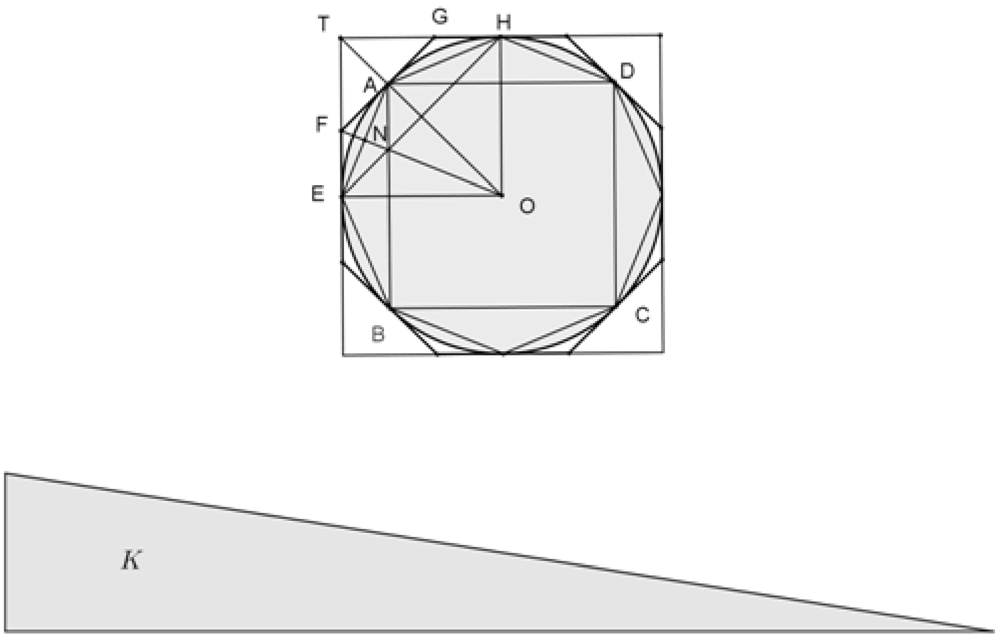


Figura 10 − O círculo $ABCD$ e o triângulo K

Ao provar esta proposição, Arquimedes, usou o método de exaustão, aplicando uma dupla demonstração por absurdo, ou seja, se o círculo não for nem maior, nem menor do que K, então tem de ser igual.

Primeira parte:

suponhamos que $\text{área do círculo} > K$.

Inscreva-se o quadrado $ABCD$ no círculo e bissectem-se cada um dos seguintes arcos de circunferência: AB, BC, CD e DA. Se necessário, bissectem-se as metades, e assim sucessivamente, até que aos lados do polígono inscrito, cujos vértices são pontos da circunferência, correspondam segmentos circulares cuja soma seja menor do que a diferença entre a área do círculo e K. Assim, a área do polígono é maior do que a de K.

Seja AE um lado qualquer do polígono, e ON a perpendicular a AE a partir do centro O. Então ON é menor do que o raio do círculo e portanto menor do que um dos catetos do triângulo rectângulo K. Também o perímetro do polígono é menor do que a circunferência do círculo, isto é, menor do que o outro cateto do triângulo K. Por conseguinte, a área do polígono é menor do que K.

Estamos, por isso, perante uma contradição, logo a área do círculo não é maior do que K.

Segunda parte:

suponhamos que $\text{área do círculo} < K$.

Circunscreva-se um quadrado tal que dois lados adjacentes tenham o ponto T como vértice comum e que encontram o círculo em E e H. Estes pontos de tangencia determinam na circunferência o arco EH. Bissectando este arco, encontramos o ponto A. Por este ponto determine-se a tangente à circunferência - FAG. Este processo pode ser repetido para os restantes vértices do quadrado circunscrito.

Então o ângulo TAG é um ângulo recto e, por conseguinte, $TG > GA$ e $TH > GH$. Logo a área do triângulo FTG é maior do que metade da área do polígono $TEAH$.

De modo semelhante, se o arco AH for bissectado e a tangente no ponto de bissecção for desenhada, deverá cortar a área GAH mais do que metade.

Assim, por este processo que pode repetir-se sucessivamente, deveremos chegar por fim ao polígono circunscrito tal que a soma dos espaços apanhados entre ele e o círculo é menor do que a diferença entre K e o círculo. Então, a área do polígono deverá ser menor do que K.

Por outro lado, uma vez que a perpendicular de qualquer lado do polígono é igual ao raio do círculo, enquanto o perímetro do polígono é maior do que a circunferência do círculo, segue-se que a área do polígono é maior do que K. Chegamos a uma contradição, portanto, a área do círculo não é inferior à de K.

Em conclusão, se a área do círculo não é nem maior nem menor do que K, tem de ser igual a K, como se pretendia provar.

Continuando a analisar o tratado *Medida do círculo* reparamos que a segunda proposição tem um enunciado pouco claro pois depende do que é demonstrado na proposição 3. Este aspecto parece indicar uma ordem errónea das proposições, provavelmente, como resultado de uma má cópia ou tradução defeituosa, anos ou séculos depois de Arquimedes[63]. No enunciado afirma-se que a razão entre a área do círculo e o quadrado do seu diâmetro é $\frac{11}{14}$, o que significa dizer que o diâmetro foi dividido em sete partes iguais e a periferia do círculo (isto é, o comprimento da circunferência) é igual a vinte e duas dessas partes.

O outro resultado dado nesta obra é o da descoberta feita por Arquimedes sobre a relação entre a medida da circunferência e a medida do diâmetro respectivo. Isto é, na proposição 3, deu um resultado para aquela relação com tal rigor como nunca antes tinha sido apresentado e passou a ser interpretada como um número no século XVII. Esse valor constante foi, no início do século XVIII, designado pelo símbolo π, mas só no final desse século entrou no léxico matemático[64].

A importância matemática e histórica do resultado enunciado na proposição 3 requer uma atenção particular, pelo que daremos de seguida o seu enunciado e demonstração, de acordo com o que conhecemos da obra de Arquimedes. Consideremos o enunciado, formulado do seguinte modo:

> A razão entre o comprimento da circunferência de qualquer círculo e o respectivo diâmetro é menor do que $3\frac{1}{7}$, mas maior do que $3\frac{10}{71}$.

Para demonstrar este resultado, Arquimedes partiu de hexágonos regulares, um inscrito e outro circunscrito ao círculo. Por um processo de duplicação sucessiva do

[63] William Dunham, *Journey through genius: the great theorems of mathematics*, 1947, Wiley Science Editions, USA, Copyright © 1990 by John Wiley & Sons, Inc, p. 99.

[64] Sherman Stein, *Archimedes, What did he do besides cry Eureka?*, p. 103. O símbolo π foi introduzido em 1706 por William Jones.

número de lados dos respectivos polígonos, chegou a polígonos regulares de noventa e seis lados, verificando em seguida que o comprimento da circunferência do círculo é um valor compreendido entre os perímetros dos dois polígonos.

Fazendo uso de conceitos geométricos e da aritmética, o habilidoso matemático siracusano, conseguiu estimar o perímetro daqueles polígonos e, assim, obteve um bom enquadramento para o valor de π. Isto é, pôde concluir que:

$$3\frac{10}{71} < \frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{diâmetro}} < 3\frac{1}{7}.$$

Primeira parte:

provar que:

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{diâmetro}} < 3\frac{1}{7}.$$

Para encontrar um limite superior para a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro, Arquimedes considerou polígonos regulares circunscritos ao círculo.

Seja AB o diâmetro de qualquer círculo de centro O, AC a tangente em A, e o ângulo AOC é a terça parte de um ângulo recto.

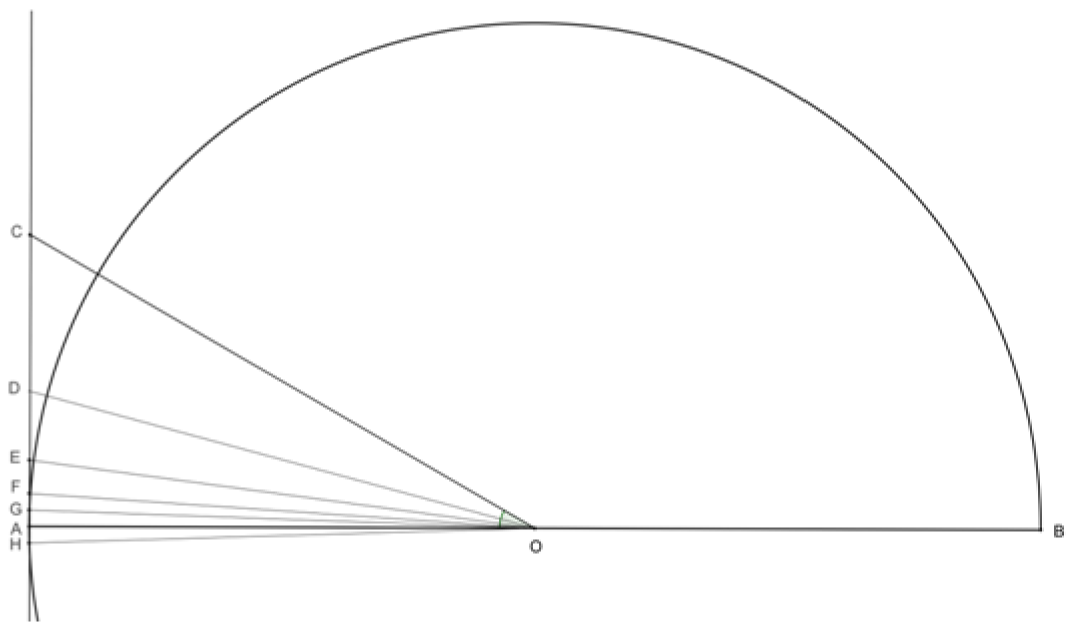


Figura 11

A razão $\frac{OC}{AC}=2$ era conhecida e por conseguinte $\frac{OA}{AC}=\sqrt{3}$.

No entanto, sem que Arquimedes desse alguma explicação, deu um valor aproximado para $\sqrt{3}$ que estabeleceu como limite inferior [65].

Em particular considerou:

$$\frac{OA}{AC}=\frac{\sqrt{3}}{1}>\frac{265}{153}, \qquad (1)$$

e

$$\frac{OC}{AC}=\frac{2}{1}=\frac{306}{153}. \qquad (2)$$

Nesta situação, teríamos um hexágono regular circunscrito ao círculo, cujo lado é $2\times AC$ e o diâmetro do círculo é $2\times OA$. Conhecendo a relação em (1) pode determinar-se a razão entre o perímetro do hexágono regular e o diâmetro do círculo.

Todavia, é possível melhorar o valor aproximado desta razão, pelo que, de acordo com a metodologia de Arquimedes, vamos duplicar o número de lados do polígono circunscrito.

Seja OD a bissectriz do ângulo AOC, que intersecta a tangente AC no ponto D e, naturalmente, o ângulo $AOD=\frac{1}{6}(\text{do ângulo recto})$. Assim, pela propriedade 3 do Livro VI de os *Elementos* de Euclides[66], temos:

$$\frac{OC}{OA}=\frac{CD}{AD},$$

donde, pela razão composta,

$$\frac{OC+OA}{OA}=\frac{AC}{AD} \text{ ou, pelas regras das proporções, } \frac{OC+OA}{AC}=\frac{OA}{AD}.$$

Portanto, por (1) e (2), obtemos:

$$\frac{OA}{AD}>\frac{571}{153}. \qquad (3)$$

[65] Heath, *The Works of Archimedes,* p. lxxx.

[66] A proposição 3 do livro VI de os Elementos diz que se um ângulo de um triângulo for bissectado, os segmentos da base terão a mesma razão do que os outros lados do triângulo, *in Les oeuvres d' Euclide*, p. 142.

Verifica-se também,

$$\frac{OD^2}{AD^2} = \frac{OA^2 + AD^2}{AD^2} > \frac{571^2 + 153^2}{153^2} > \frac{349450}{23409},$$

e, por conseguinte

$$\frac{OD}{AD} > \frac{591\frac{1}{8}}{153}. \qquad (4)$$

Podemos afirmar que se considerarmos o polígono regular de doze lados circunscrito ao círculo, cujo lado é $2\times AD$ e o diâmetro do círculo é $2\times OA$. Conhecendo a relação em (3) pode determinar-se a razão entre o perímetro do dodecágono regular e o diâmetro do círculo.

Arquimedes repetiu o processo para polígonos de vinte e quatro, quarenta e oito e noventa e seis lados, de modo a obter, de cada vez, um resultado mais rigoroso para a razão entre o perímetro do polígono circunscrito e o diâmetro do círculo. Teve, por isso, que lidar com cálculos complexos, mostrando que tinha um método preciso para o cálculo de raízes quadradas de números grandes[67].

Em suma, Arquimedes encontrou, sucessivamente:

$$\frac{OA}{AE} > \frac{1162\frac{1}{8}}{153}, \text{ sendo } \angle AOE = \frac{1}{12}\text{(do ângulo recto)}$$

$$\frac{OA}{AF} > \frac{2334\frac{1}{4}}{153}, \text{ sendo } \angle AOF = \frac{1}{24}\text{(do ângulo recto)}$$

$$\frac{OA}{AG} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153}, \text{ sendo } \angle AOG = \frac{1}{48}\text{(do ângulo recto)}$$

Seja o ponto H o simétrico do ponto G em relação a AB. Então GH é um lado de um polígono regular de noventa e seis lados circunscrito ao círculo e o ângulo GOH é $\frac{1}{24}$ do ângulo recto.

Sendo AB o diâmetro do círculo e GH o lado do polígono regular de noventa e seis lados circunscrito ao círculo, cujo perímetro se designa P_{96}, obtemos:

$$AB = 2\times OA \text{ e } GH = 2\times AG$$

e

[67] Marshall Clagett, «Archimedes», p. 94.

$$\frac{AB}{P_{96}} = \frac{OA}{AG \times 96} > \frac{4673\frac{1}{2}}{153 \times 96} = \frac{4673\frac{1}{2}}{14688}.$$

No entanto, queremos determinar $\frac{P_{96}}{AB}$, donde[68]

$$\frac{P_{96}}{AB} < \frac{14688}{4673\frac{1}{2}} = 3 + \frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}}.$$

O valor $667\frac{1}{2}$ é inferior à sétima parte do diâmetro AB, pois $7 \times 667\frac{1}{2} = 4672\frac{1}{2}$. Isto é,

$$\frac{667\frac{1}{2}}{4673\frac{1}{2}} < \frac{667\frac{1}{2}}{4672\frac{1}{2}} = \frac{667\frac{1}{2}}{7 \times 667\frac{1}{2}}.$$

Assim, por maioria de razão, obtém-se:

$$\frac{P_{96}}{AB} < 3\frac{1}{7}.$$

A proposição 1 de *Sobre a esfera e o cilindro* afirma que o perímetro de um polígono circunscrito a um círculo excede o comprimento do círculo.

Em conclusão, podemos dizer que a razão entre a circunferência do círculo e o diâmetro AB é menor do que $3\frac{1}{7}$, como se pretendia provar.

Segunda parte:

Trata-se agora de provar que

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{diâmetro}} > 3\frac{10}{71}.$$

Neste caso, para encontrar um limite inferior para a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro, Arquimedes considerou polígonos regulares inscritos ao círculo. Consideremos a figura seguinte:

[68] Heath, *The Works of Archimedes*, p. 96.

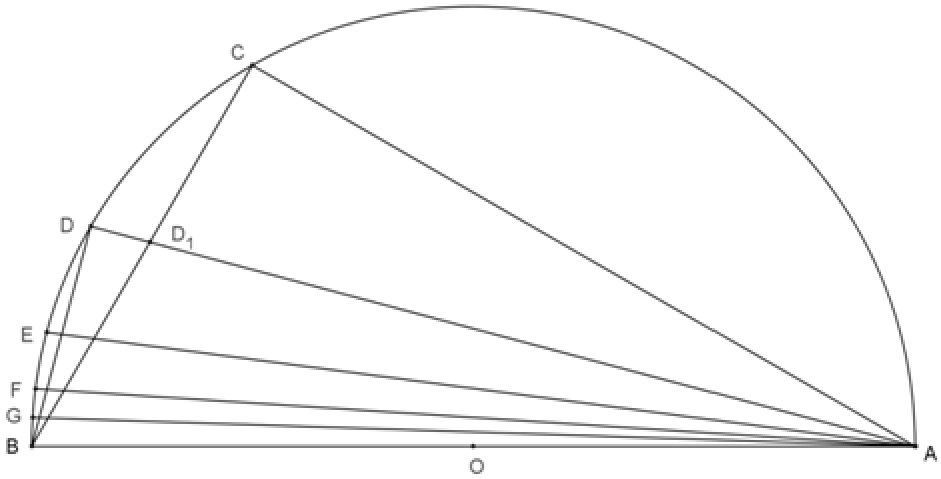


Figura 12

Sejam AB o diâmetro do círculo e AC a semi-recta que intersecta a circunferência no ponto C, de tal modo que o ângulo CAB seja a terça parte do ângulo recto.

Unindo os pontos B e C, obtemos o triângulo rectângulo ABC em C.

O sábio grego partiu da relação entre os catetos do triângulo rectângulo e considerou, como limite superior, para $\sqrt{3}$ o valor aproximado[69]:

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{3}}{1} < \frac{1351}{780}.$$

Além disso, conhece-se a relação entre AB e BC, como referimos na primeira parte da demonstração, isto é, $AB = 2 \times BC$.

Sejam AD a bissectriz do ângulo BAC, D o ponto de intersecção da bissectriz com o círculo e D_1 o ponto de intersecção da bissectriz com o segmento BD.

Então verifica-se a seguinte relação de congruência entre as amplitudes dos ângulos:

$$\angle BAD = \angle D_1AC = \angle D_1BD.$$

Daqui e do facto de o triângulo BDC também ser rectângulo em D, decorre que os triângulos ADB, ACD_1 e BDD_1 são semelhantes.

[69] Heath, *The Works of Archimedes*, p. lxxx.

Portanto,

$$\frac{AD}{DB}=\frac{BD}{DD_1}=\frac{AC}{CD_1},$$

e pela proposição 3 do Livro VI de os *Elementos* de Euclides:

$$\frac{AD}{DB}=\frac{AB}{BD_1}=\frac{AB+AC}{BD_1+CD_1}=\frac{AB+AC}{BC}.$$

Ou seja:

$$\frac{AB+AC}{BC}=\frac{AD}{BD}.$$

Por outro lado, sabemos que

$$\frac{AC}{BC}<\frac{1351}{780} \quad \text{e} \quad \frac{AB}{BC}=\frac{2}{1}=\frac{1560}{780}.$$

Por conseguinte tem-se

$$\frac{AD}{BD}<\frac{2911}{780}.$$

Além disso podemos escrever

$$\frac{AB^2}{BD^2}<\frac{2911^2+780^2}{780^2}<\frac{9082321}{608400}.$$

Assim,

$$\frac{AB}{BD}<\frac{3013\frac{3}{4}}{780}.$$

Obtém-se, deste modo, a relação entre o diâmetro do círculo e o lado de um dodecágono regular inscrito, e daqui obter-se-ia a razão entre o perímetro desse polígono e o diâmetro do círculo. No entanto esta aproximação pode ser melhorada, segundo o processo seguido por Arquimedes, duplicando o número de lados do polígono, até obter um polígono inscrito no círculo com noventa e seis lados.

Considerando o ângulo BAE, o segmento de recta BE será o lado de polígono de vinte e quatro lados inscrito no círculo. Recorrendo a cálculos anteriores é possível encontrar a relação entre AB e BE.

Obtém-se:

$$\frac{AB}{BE} < \frac{1838\frac{9}{11}}{240}.$$

Melhorando a aproximação para polígonos regulares de quarenta e oito e noventa e seis lados, Arquimedes obteve, respectivamente:

$$\frac{AB}{BF} < \frac{1009\frac{1}{6}}{66} \quad \text{e} \quad \frac{AB}{BG} < \frac{2017\frac{1}{4}}{66}.$$

Mas o que se pretende é a relação entre o perímetro do polígono regular de noventa e seis lados inscrito no círculo, p_{96}, e o seu diâmetro. Então tem-se

$$\frac{BG}{AB} > \frac{66}{2017\frac{1}{4}}.$$

Segue-se que:

$$\frac{p_{96}}{AB} > \frac{96 \times 66}{2017\frac{1}{4}} = \frac{6336}{2017\frac{1}{4}}.$$

E verifica-se que[70]

$$\frac{6336}{2017\frac{1}{4}} = \frac{3 \times 2017\frac{1}{4} + 284\frac{1}{4}}{2017\frac{1}{4}} > 3\frac{10}{71}.$$

Em conclusão, a circunferência do círculo, maior do que o perímetro do polígono circunscrito, é, por maioria de razão, maior do que $3\frac{10}{71}$ vezes o diâmetro AB.

Assim, fica provada a dupla desigualdade que se pretendia obter:

$$3\frac{10}{71} < \frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{diâmetro}} < 3\frac{1}{7}.$$

Este é um resultado conseguido pelo uso engenhoso do cálculo de áreas e aproximações convenientes para raízes quadradas.

Repare-se que, para além de Arquimedes revelar perícia nos cálculos efectuados, usou (sem justificar) um enquadramento para $\sqrt{3}$ ($\frac{1351}{780} > \sqrt{3} > \frac{265}{153}$) que habilmente

[70] Heath, *The Works of Archimedes*, p. 98.

utilizou na demonstração. Trabalhou cada um daqueles números − limites superior e inferior −, em coordenação com os valores por defeito e excesso para a razão entre o comprimento da circunferência e o respectivo diâmetro. Isto é, de forma eloquente, adoptou o limite superior (inferior) de $\sqrt{3}$ para calcular por defeito (excesso) a razão desconhecida entre o comprimento da circunferência e o respectivo diâmetro.

Assinale-se que ao longo da Idade Média o valor considerado para aquela razão foi o de $3\frac{1}{7}$ ou, de outro modo, $\frac{22}{7}$, valor este ainda hoje usado, sempre que uma aproximação seja suficiente. Contudo, vários matemáticos, ao tomaram como certa a Proposição 2 deste tratado, foram induzidos em erro. Recordemos que desta proposição − tudo indica copiada fora de ordem no tratado −, resulta:

$$\frac{\text{área do círculo}}{\text{área do quadrado circunscrito}} = \frac{11}{14}.$$

Pela Proposição 1 desta obra e sabendo que o lado do quadrado circunscrito é igual ao diâmetro do círculo, obtemos:

$$\frac{\text{área do círculo}}{4\times r^2} = \frac{11}{14} \Leftrightarrow \frac{r\times\frac{1}{2}\text{comprimento da circunferência}}{4\times r^2} = \frac{11}{14},$$

donde resulta:

$$\frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{diâmetro círculo}} = \frac{22}{7}.$$

Isto é, se o diâmetro foi dividido em sete partes iguais, o comprimento da circunferência é igual a vinte e duas dessas partes.

Este resultado utiliza uma conclusão demonstrada na terceira proposição, indo contra as normas sequenciais da descoberta dedutiva. De facto a proposição 3 deveria ter surgido em primeiro lugar. Por outro lado, a proposição 2 falha por causa de não se ter distinguido entre valores exactos e valores aproximados das medidas, isto é, não foi tido em conta o enunciado da proposição 3.

O tratado *Medida do círculo* foi, na idade Média, muito comentado e incluído em trabalhos de outros autores. Mas, a boa compreensão das proposições surgirá, apenas, em meados do século XVI.

1.4.9. *O contador de areia*

Na obra *O contador de areia*, Arquimedes dirigindo-se ao Rei Gelon, filho de Herão, propõe-se avaliar o número de grãos de areia necessários para preencher o universo. Note-se que Arquimedes vivia em Siracusa, uma cidade da costa da Sicília, e, por isso, compreende-se que a sua imaginação o levasse a pensar nesse problema. Para que pudesse dar algum número teve de fazer uma estimativa do tamanho da Terra. Por essa razão, nesta obra menciona a teoria heliocêntrica do sistema solar proposta por Aristarco de Samos (c. 310 - 230 a.C.), mas que não chegou até nós.

Nesta obra deu-nos a conhecer as ideias contemporâneas sobre o tamanho da Terra e a distância entre vários corpos celestes. É a este propósito que, Arquimedes referiu o único resultado que se conhece do astrónomo Fídias, seu pai[71] – o diâmetro do Sol é doze vezes maior do que o da Lua.

Em termos que se podem considerar de desabafo acentuou que muitos destes temas podiam ser estranhos para os que desconheciam a matemática, mas não para os que estudaram as questões das distâncias da Terra à Lua e ao Sol e, por isso, considerou adequado apresentar as suas investigações ao Rei.

O matemático propõe-se fazer aqueles cálculos geometricamente e surpreende pela habilidade com que trabalhou números que envolviam milhões de algarismos. Concebeu um sistema de numeração que lhe permitiu trabalhar com números muito grandes – designou por miríade o número dez mil. Aplicou propriedades de uma série geométrica para fazer corresponder a esfera de diâmetro definido por Aristarco ao número de grãos de areia necessários para a encher[72]. Pôde assim encontrar, em notação moderna, o número 10^{63} que representaria os grãos de areia necessários para preencher o universo, por alguns considerado infinito[73].

Este é o único tratado em que Arquimedes revelou qualidades para lidar com questões da aritmética e em que se referiu a questões de astronomia, na época uma disciplina próxima da matemática.

---

[71] Dijksterhuis, *Archimedes*, p. 10.

[72] Heath, *The Works of Archimedes*, pp. 231-232.

[73] *Ibidem*, p. 221.

1.4.10. *Stomachion*

O tratado com este nome corresponde à descrição de um quebra-cabeças tipo puzzle, semelhante a um tangram. Deste trabalho são conhecidos dois fragmentos − um em grego, contido no "palimpsesto Arquimedes" e o outro numa tradução para o árabe[74] − que, no entanto, são insuficientes para compreender o objectivo com que foi escrita esta obra.

A origem do nome do puzzle não é clara, e foi sugerido que provém da palavra antiga da língua grega para "estômago"[75].

O jogo também é conhecido como *Caixa de Arquimedes* (*Loculus Archimedius*), designação atribuída por Mário Victorino (séc. IV) e Atilio Fortunaciano (século VI)[76].

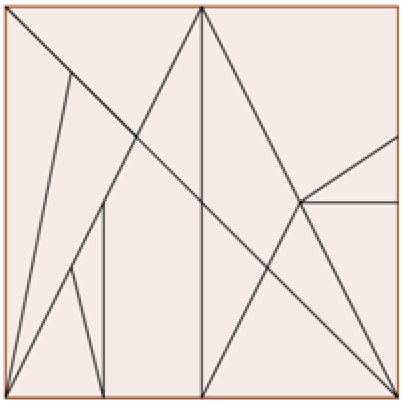


Figura 13 − Jogo *Stomachion*

O *Stomachion* é constituído por catorze peças, que devem ser dispostas de modo a formar um quadrado. É natural, por isso, perguntar de quantas maneiras diferentes será possível reunir as peças de modo a obter esse quadrado.

A autoria do quebra-cabeças talvez não possa ser provada, mas pode dizer-se que é um problema de contagem, que Arquimedes, segundo a pesquisa publicada em 2003 por Reviel Netz (Universidade de Stanford), terá colocado aquela questão para decifrar o problema. Nesta perspectiva, trata-se de um difícil problema em que os aspectos combinatórios estão interligados com os de natureza geométrica.

[74] Dijksterhuis, *Archimedes*, p. 408.

[75] Consulta *in* http://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Stomachion/intro.html

[76] Dijksterhuis, *Archimedes*, p. 410.

Em Novembro de 2003, Bill Cutler[77], por meio de um programa de computador, revelou a existência de 536 maneiras distintas das peças formarem um quadrado, quando se excluem as soluções que são equivalentes por rotação e reflexão[78].

Não se sabe se Arquimedes terá chegado ao número correcto, mas procurava um resultado que excluísse certas situações, atendendo ao texto seguinte retirado do palimpsesto[79]:

> […] não há um pequeno número de figuras feitas a partir delas, porque é possível rodá-las para outro lugar de uma figura igual e equiangular, transposta para assumir outra posição; e também com duas figuras, consideradas juntas, sendo iguais e similares a uma única figura, e duas figuras consideradas juntas sendo iguais e similares a duas figuras consideradas juntas – então com a transposição, muitas figuras combinadas.

1.4.11. *O problema dos bois*

Este trabalho foi atribuído a Arquimedes[80] e publicado por Gotthold Ephraim Lessing em 1773, que encontrou um manuscrito grego na Biblioteca Herzog (Alemanha).

É um problema enunciado na forma de poema − epigrama grego em quarenta e quatro versos −, destinado a Eratóstenes e aos matemáticos de Alexandria.

Arquimedes desafiava-os a contar o número de bois que pastavam na ilha da Trinácria (Sicília) em quatro rebanhos do Sol de cores branca, preta, castanha e malhada.

A resolução, atendendo às variáveis envolvidas no enunciado, conduz a um sistema indeterminado de equações com oito incógnitas[81]. Com o apoio de computadores foi possível encontrar o menor número que é solução desse epigrama em 1965. Esse valor é

---

[77] Consulta *in* http://mathworld.wolfram.com/Stomachion.html [10 Janeiro 2014]

[78] As 536 soluções foram publicadas no sítio da Mathematical Association of America num artigo escrito por Ed Pegg, com notas históricas adicionais e referências, *in* http://www.gamepuzzles.com/tlog/tlog24.htm#Archimedes

[79] Carlos Pereira Santos, Jorge Nuno Silva, João Pedro Neto, *A Geometria de Arquimedes + Puzzle Stomachion*, Colecção Jogos com História, Ludus, CHC-UL, SPM, Junho 2007.

[80] Heath, *The Works of Archimedes*, p. xxxiv.

[81] Fernando Vasconcelos, *História das Matemáticas na Antiguidade*, Edição e coordenação por Augusto J. Franco de Oliveira, Associação Ludus, 2009, pp. 263-2645.

um número que o próprio Arquimedes não conheceria, mas que certamente intuíra ser muito grande[82].

1.5. Arquimedes inventor − os mecanismos

O lugar de Arquimedes na história da ciência é justamente atribuído pelo valor científico dos trabalhos de matemática e física. Contudo, a criatividade que o caracterizou fez com que o seu nome ficasse, desde a Antiguidade, associado à invenção de dispositivos mecânicos cuja autoria lhe tem sido atribuída, de acordo com as investigações de Drachmann. No entanto, segundo Plutarco, o próprio não terá valorizado tais inventos, não havendo documentos que o comprovem[83].

Uma dessas invenções é o designado parafuso de Arquimedes. Pode ter sido inventado quando Arquimedes visitou o Egipto, com a finalidade de irrigar os terrenos − informação transmitida pelo historiador siciliano Diodoro (c. século I a.C.) na sua obra *Biblioteca de História*[84].

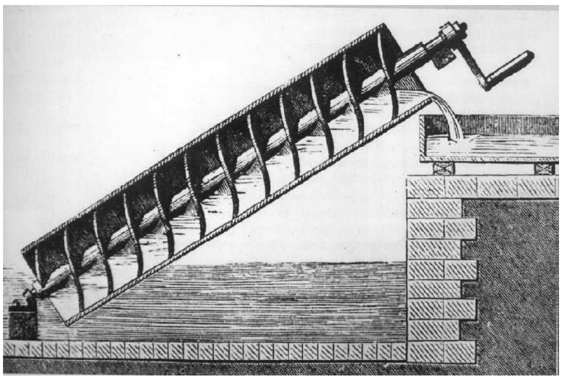


Figura 14 − Parafuso de Arquimedes
(*in* www.asme.org/about-asme/who-we-are/engineering-history/landmarks/91-archimedes-screw-pump)

Com este dispositivo era possível transportar água de um lado para outro sem grande esforço, tendo sido, por isso, também usado no trabalho em minas. Por outro lado,

[82] Keith Devlin, *Curiosidades Matemáticas para resolver com computadora*, Editorial Limusa, México, 1991, pp. 55-59.

[83] Michel Authier, "Arquimedes: o cânone do sábio", p. 128.

[84] Diodoro, *Biblioteca de História*, Livro V, parágrafo 37. (Versão digital em http://penelope.uchicago.edu/Thayer/E/Roman/Texts/Diodorus_Siculus/5B*.html)

segundo o escritor grego Ateneu de Naucrati (c. século II d.C.), este mecanismo foi utilizado para o lançamento de um navio ao mar[85].

A este propósito, Plutarco conta que o Rei Herão II de Siracusa, confrontado com aquela dificuldade, colocou a questão de como mover um peso grande com um esforço mínimo. Segundo Proclo, Herão tinha mandado construir o navio para oferecer ao Rei Ptolomeu do Egipto e, os siracusanos, com todas as energias reunidas, não tinham sido bem sucedidos na tarefa de o lançar ao mar.

Para resolver o mesmo problema, é conhecida a versão dos acontecimentos dada por Plutarco e Tzetzes, que consistia em usar um sistema formado por roldanas. Em qualquer dos procedimentos, não contraditórios[86], o próprio Herão, segundo Proclo, pôde movê-lo, e terá declarado que, a partir daquele dia, "Arquimedes deveria ser acreditado em tudo o que dissesse"[87]. Esta história leva-nos à muito divulgada frase "dêem-me um ponto de apoio e moverei o mundo", que Papo escreveu na sua principal obra *Colecção Matemática*[88].

Outros mecanismos foram relatados por Plutarco em *Vida de Marcelo*, referindo-se a máquinas com a finalidade de poderem ser usadas em contexto de guerra[89]. Tais invenções de natureza prática vieram a ter um papel importante no ataque a Siracusa pelos romanos durante a Segunda Guerra Púnica, sob o comando do general Marcelo[90].

A eficácia dos instrumentos de balística, também relatada por Políbio e Lívio, deu prestígio ao inventor e permitiu aos siracusanos resistirem aos ataques dos romanos durante longos meses. Segundo Políbio, os romanos foram surpreendidos pela habilidade de Arquimedes e não conseguiram prever que "o génio de um homem realiza muito mais do que qualquer número de mãos"[91].

---

[85] Marshall Clagett, «Archimedes», p. 85.

[86] A. G. Drachmann, «How Archimedes expected to move the earth», *Centaurus*, p. 280.

[87] Heath, *The Works of Archimedes*, p. xix.

[88] Marshall Clagett, «Archimedes», p. 86.

[89] Plutarco poderia conhecer a biografia de Arquimedes, escrita por Heracleides. Michel Authier, "Arquimedes: o cânone do sábio", p. 131.

[90] Plutarco conta na biografia de Marcelo (*Vida de Marcelo*) que o próprio Rei Herão terá persuadido Arquimedes a preparar a defesa de Siracusa, *in* A. G. Drachmann, «How Archimedes expected to move the earth», p. 278.

[91] Políbio, *Histórias*, Fragmentos do Livro VIII, parágrafo 3. (Versão digital em http://penelope.uchicago.edu/Thayer/E/Roman/Texts/Polybius/8*.html#3)

Ainda, para defesa militar da cidade de Siracusa, aparece, por vezes, referida outra invenção que não pode confirmar-se – a construção de um sistema de espelhos parabólicos com a finalidade de incendiar as velas dos navios que se aproximavam da costa de Siracusa[92].

Mais credível é a referência de Papo a um trabalho de Arquimedes, hoje perdido – *Sobre a construção de esferas* – onde explicava como construir um modelo planetário que pudesse simular o movimento aparente do Sol, da Lua e dos planetas. Cícero escreveu que o general Marcelo levou para Roma o planetário de Arquimedes, após o saque a Siracusa. Era um modelo que, segundo Cícero, merecia especial admiração por ter sido imaginado para representar, mecanicamente, os diferentes movimentos[93]. Desse modelo não se conhece qualquer vestígio, mas o próprio Arquimedes, segundo Heath, descreve-o em *O contador de areia* para, de modo experimental, medir o diâmetro do Sol[94].

De autenticidade duvidosa é a história contada por Vitrúvio no seu *Tratado de Arquitectura*, segundo a qual o Rei Herão solicitou a Arquimedes que averiguasse da autenticidade do material usado na construção de uma coroa. O Rei teria fornecido ao artesão a quantidade de ouro necessária, mas sob a suspeita de fraude, Arquimedes tinha a missão de resolver o problema. Esta é a história, com característica de anedota, segundo a qual Arquimedes ao entrar numa banheira terá, supostamente, encontrado a solução para o problema. Entusiasmado, saiu para a rua, proferindo a expressão "*Eureka*, *Eureka*". A versão de Vitrúvio, ainda hoje muito repetida, não clarifica a resolução daquele problema, que será por nós analisado no Capítulo 2.

1.6. Manuscritos e obras impressas de Arquimedes

1.6.1. Os manuscritos

Sobre Arquimedes temos como certo que viveu a maior parte da sua vida em Siracusa, possivelmente dedicando-se a aplicar a matemática em contextos técnicos, mas sobretudo a escrever vários tratados de índole teórica.

---

[92] Esta invenção só aparece referida por Galeno (129−c.200), um importante médico e filósofo romano de origem grega, aproximadamente, quatro séculos depois da morte de Arquimedes, *in* Sherman Stein, *Archimedes, What did he do besides cry Eureka?*, p. 5.

[93] Marshall Clagett, «Archimedes», p. 86.

[94] Heath, *The Works of Archimedes*, p. xxi.

Neste trabalho já nos referimos à correspondência entre Arquimedes e os seus amigos matemáticos, Conon, Eratóstenes e Dositeu. Não é, pois, de estranhar que, séculos depois, no Egipto, três matemáticos de Alexandria – Herão (século I), Papo e Teão (século IV) – fizessem referência a alguns dos seus trabalhos, permitindo concluir que foram aí estudados. Contudo, ninguém entre os estudiosos daquele tempo teve a preocupação de os agregar num único volume. É, pois, de admitir que, nos séculos III e IV, a lista dos tratados existentes fosse mais extensa do que a que hoje conhecemos, sendo provável a perda de alguns dos documentos no incêndio da famosa biblioteca de Alexandria[95].

No final do século V, Eutócio de Áscalon, fez um contributo que se tornaria num marco para a divulgação do conhecimento de Arquimedes. Estudou em Alexandria, deu início ao trabalho de compilação das obras do sábio e escreveu comentários a três dos trabalhos mais populares na época: *Sobre a esfera e o cilindro*, *Medida do círculo* e *Sobre o equilíbrio dos planos*. O comentário à *Medida do círculo* ajudou ao esclarecimento dos cálculos apresentados pelo matemático para encontrar a razão entre o comprimento da circunferência e o seu diâmetro. Por outro lado, o comentário a *Sobre a esfera e o cilindro* é importante pelas referências históricas da geometria grega.

Em Constantinopla, as obras de Arquimedes então conhecidas e os comentários de Eutócio foram estudados na escola dos arquitectos bizantinos Isidoro de Mileto (século VI) e Antémio de Trales. Estes, por volta de 532, foram os responsáveis pela construção da igreja de Santa Sofia[96]. O arquitecto Isidoro terá mandado os seus alunos estudar, em particular, *Sobre a esfera e o cilindro* e a *Medida do círculo* e terá sido o responsável pela edição daqueles documentos, traduzindo-os para Grego clássico a partir do dialecto Siciliano-Dórico usado por Arquimedes.

Outras obras foram sendo acrescentadas, até que no século IX, o enciclopedista Leão de Tessalónica (Salónica) produziu uma compilação, designada de "manuscrito A" por Heiberg. Até final do século XIV terá pertencido a algum privado, sendo certo que pertenceu ao matemático italiano Giorgio Valla. Nesse manuscrito estavam todas as obras actualmente conhecidas, excepto *Sobre os corpos flutuantes*, *O método dos*

[95] Dijksterhuis, *Archimedes*, p. 34. O incêndio que atingiu a biblioteca de Alexandria no ano 391 tem sido considerado uma das grandes catástrofes culturais da humanidade.

[96] Marshall Clagett, «Archimedes», p. 95.

teoremas mecânicos, *Stomachion* e *O problema bovino*[97]. Após a morte de Valla, o manuscrito passou para o Cardeal Rodolfo Pio em 1550 por herança do príncipe Alberto Pio. No entanto, à data da morte do Cardeal (1564) já não era possível localizá-lo[98].

Apesar de não se conhecer o rasto do "manuscrito A", o seu conteúdo não se perdeu, pois fizeram-se cópias e traduções que permitiram difundir os documentos gregos. Em 1269, foi um dos manuscritos usados por Guilherme de Moerbeke (1214 - 1286) para traduzir aquelas obras do grego para o latim. Este frade dominicano tinha sido contratado, entre 1268 e 1280, pela corte papal, em Viterbo, para fazer uma tradução acessível aos estudiosos da Europa Ocidental de vários autores gregos. Em particular, o original da tradução dos tratados de Arquimedes foi reencontrado no Vaticano em 1884[99].

O trabalho de Moerbeke foi relevante pelo facto de incluir tratados menos familiares aos árabes, como por exemplo, *Sobre as espirais, Quadratura da parábola* e *Sobre* c*onóides e esferóides*.

Do "manuscrito A", foi feita uma nova tradução para o latim em 1450 de que nos ocuparemos mais adiante neste trabalho.

Um outro manuscrito bizantino – "manuscrito B" na designação de Heiberg –, estava também disponível para a tradução latina de Moerbeke. Incluía apenas as obras de mecânica e óptica e sabe-se que em 1311 constava da biblioteca do Papa, em Viterbo, mas posteriormente o seu paradeiro é desconhecido. Continha as obras: *Sobre o equilíbrio dos planos*, *Quadratura da parábola*, *Sobre os corpos flutuantes* e *Sobre as espirais*. Deste manuscrito não há notícia a partir do século XIV.

Sabe-se que seis das nove traduções feitas por Moerbeke, com base nos manuscritos A e B, foram conhecidas e usadas em meados do século XIV na Universidade de Paris[100], demonstrando o interesse pelas obras do grande matemático.

Há ainda que mencionar um terceiro manuscrito − "manuscrito C", de acordo com a nomenclatura de Heiberg − o único que sobreviveu, sob o anonimato, escondido num Mosteiro de Constantinopla. De origem bizantina, não estava disponível no ocidente na Idade Média, continha, entre outros, dois textos extraordinários, em grego: *O método*

---

[97] Marshall Clagett, «Archimedes», p. 96.

[98] Dijksterhuis, *Archimedes*, pp. 36-37.

[99] *Ibidem*, pp. 37-38

[100] Marshall Clagett, «Archimedes», pp. 100-101.

dos teoremas mecânicos e *Sobre os corpos flutuantes*[101]. Estes tratados não constavam dos manuscritos A e B, sabendo-se do primeiro unicamente por ser referido noutras obras e, do segundo, desconhecia-se o texto em grego por ter desaparecido com o "manuscrito B".

Foi o filólogo Heiberg, em 1906, que descobriu o "manuscrito C" ou Codex Arquimedes. Teve conhecimento de uma referência a um palimpsesto pertencente à Biblioteca da Igreja do Santo Sepulcro, em Jerusalém, mas trazido para Constantinopla no século XIII. Heiberg, depois de estudar o manuscrito em 1906 e 1908, provou tratar-se de textos de Arquimedes escritos no século X. Decifrou então grande parte do texto original sobre o qual estavam os textos religiosos, que, ironicamente, terão protegido o manuscrito bizantino da destruição.

Por volta de 1930 desconhecia-se a localização do Codex Arquimedes, mas em 1998 reapareceu num leilão em Nova Iorque[102]. Ficou à guarda do Museu de Arte Walters, em Baltimore, Maryland, onde uma equipa de restauradores e investigadores começou a tratá-lo e a estudá-lo, utilizando as mais modernas técnicas.

As traduções dos manuscritos do grego e do árabe para o latim mostram que durante a Idade Média, as obras de Arquimedes foram difundidas, quer em território bizantino quer árabe. Por volta do século IX, os árabes teriam disponível apenas o "manuscrito A". Por isso, das obras do matemático grego conheciam *Sobre a esfera e o cilindro*, *Medida do círculo*, *Sobre os corpos flutuantes*, *Quadratura da parábola*, *Sobre o equilíbrio dos planos*, bem como outros textos que os árabes atribuíram ao siracusano.

A tradução para árabe de *Sobre a esfera e o cilindro*, do início do século IX incluía uma parte do comentário de Eutócio, mas era uma versão pobre e posteriormente revista, primeiro por Ishāq ibn Hunayn e depois por Thābit ibn Qurra (836 - 901). No século XIII foi reeditada, parafraseada e comentada por autores árabes. Thābit ibn Qurra foi também o tradutor da *Medida do círculo* e terá dedicado atenção ao tratado *Quadratura da parábola*.

Entre os textos de que não se conhece o original grego, mas que os árabes identificaram como arquimedianos, destacam-se o *Livro dos Lemas* e o *Livro sobre a divisão do círculo em sete partes*. Essa opinião encontra justificação no facto de, nestes

---

[101] Marshall Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, Vol. 1, The University of Wisconsin Press, Madison, 1964, p. 3.

[102] Em 29 de Outubro de 1998, no leilão da Christie, em Nova Iorque, um anónimo pagou dois milhões de dólares pelo palimpsesto, *in* Sherman Stein, *Archimedes, What did he do besides cry Eureka?*, p. 31.

trabalhos, ter sido usada a técnica de construção geométrica − *neusis* − semelhante à aplicada por Arquimedes[103].

No ocidente, as traduções arquimedianas surgem no século XII, a partir do árabe. Em particular a *Medida do círculo* foi o primeiro trabalho de Arquimedes a ser traduzido para o latim. Deste tratado conhecem-se duas traduções no século XII: uma possivelmente de Platão de Tivoli − é considerada deficiente por conter vários erros e a proposição 3 estar incompleta −; outra do tradutor, de origem italiana Gerardo de Cremona (c. 1114 - 1187), com base no texto de Thābit ibn Qurra. Segundo Dijksterhuis, a tradução de Gerardo terá sido bem recebida pelos geómetras medievais, deu origem a diferentes versões, ao longo dos séculos XIII e XIV, mostrando-se, assim, relevante para a divulgação de Arquimedes no ocidente.

Das versões medievais da *Medida do círculo*, destacamos a designada versão de Florença, onde a proposição 3 continha uma pormenorizada apresentação do cálculo da razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência, isto é, π. Este detalhe poderia levar a admitir que o autor tivesse usado os comentários de Eutócio, determinantes para a compreensão desta proposição. Contudo, não há indícios de qualquer tradução dos comentários de Eutócio feita antes de 1450 e a versão de Florença, que deverá ser anterior a 1400, diverge no procedimento aritmético de Eutócio[104].

Naturalmente que para além da muito divulgada *Medida do círculo* e as muitas versões, outras obras de Arquimedes foram alvo da atenção de estudiosos. Por exemplo, no início do século XIII, os resultados e técnicas de cálculo usadas em *Sobre a esfera e o cilindro* foram conhecidos através do tratado *De curvis superficiebus Archimenidis* atribuído a Johannes de Tinemue (João de Tynemouth), possivelmente, seguindo o texto grego. Esse tratado tornou-se popular e foi mais tarde citado, corrigido e acrescentado por outros autores latinos.

Outro momento importante na divulgação de Arquimedes ocorreu com as traduções de Moerbeke baseadas nos manuscritos A e B, que apesar de não estarem isentas de erros, estão escritas numa forma acessível. Contudo, não foram feitas muitas cópias,

[103] Marshall Clagett, «Archimedes», p. 96.

[104] Algumas das versões foram acrescentadas com referências a Euclides e com o desenvolvimento de alguns passos brevemente indicados no texto de Arquimedes. Marshall Clagett, «Archimedes», pp. 98-99.

reparando-se que *Sobre as espirais* e *Sobre os corpos flutuantes* foram copiadas, respectivamente, no século XIV e no século XVI[105].

Em meados do século XIV, as traduções arquimedianas de Moerbeke apenas não incluíam *O método*, *O problema bovino* e o *Stomachion* por não pertencerem aos manuscritos A e B. Estava, portanto, disponível em latim praticamente toda a obra conhecida de Arquimedes. Na Universidade de Paris, como anteriormente referimos, há evidências do uso directo de seis das nove traduções de Moerbeke. Um dos professores foi o matemático e astrónomo João de Muris (c.1290 - 1344), ao incluir parte daquelas traduções nos seus tratados *Circuli quadratura* (1340) e *De arte mensurandi* (c. 1343). Nestes trabalhos Muris incluiu a tradução de *Sobre as espirais*, da proposição 1 de *Medida do círculo*, várias proposições de *Sobre a esfera e o cilindro* e de *Sobre conóides e esferóides*[106]. Na década seguinte, Nicolau de Oresme (c. 1320 - 1382), no seu *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* revelou conhecer *Sobre as espirais* e em *Questiones super de celo et mundo* cita parte da tradução por Moerbeke de *Sobre os corpos flutuantes*. Note-se que antes dessa data só se conhecia a obra *Sobre os corpos flutuantes* através do tratado *De ponderibus Archimenidis sive de incidentibus in humidum*. Este trabalho do século XIII é um pseudo-arquimediano preparado a partir de fontes árabes e ao qual nos vamos referir no Capítulo 2.

Até ao século XIV, os trabalhos conhecidos de Arquimedes em latim tinham origem em textos árabes, existindo em número reduzido e com circulação reduzida[107]. Só nos séculos XV e XVI os trabalhos do matemático siracusano serão considerados notáveis.

O Papa Nicolau V encomendou a Tiago de Cremona a tradução para o latim do "manuscrito A" (1450). Terá sido influenciado pelo trabalho de Moerbeke, mas à tradução foram acrescentados os textos de *O contador de areia* e os comentários de Eutócio à *Medida do círculo*. Todavia, a obra *Sobre os corpos flutuantes* não fazia parte do "manuscrito A" e, portanto, ficou ausente. Esta tradução terá sido, no Renascimento, a fonte de todas as cópias de Arquimedes. Uma cópia dessa nova tradução foi enviada a Nicolau de Cusa (1401 - 1464). Também o matemático e astrónomo alemão Regiomontano (1436 - 1476) levou um exemplar para a Alemanha (1468) e introduziu correcções.

---

[105] Marshall Clagett, «Archimedes», pp. 99-100.

[106] *Ibidem*, p. 100.

[107] Marshall Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, Vol. 1, pp. 3-4.

A obra do grande matemático tinha passado a ser considerada de alto valor científico, a Europa já podia contar com os seus trabalhos em grego e em latim, mas em breve, conheceria a primeira edição impressa − a *editio princeps*[108].

1.6.2. Edições impressas de Arquimedes

Em meados do século XV, com a invenção da imprensa por Gutenberg, nasce uma nova possibilidade para a divulgação de textos, em particular, dos textos científicos. Foi o que aconteceu com os tratados de Arquimedes: no início do século XVI foram produzidas as primeiras edições impressas e, com elas, o acesso e a difusão das suas obras tomou uma nova, e muito maior, dimensão.

A mais antiga edição impressa contendo os textos de Arquimedes é a compilação de título *Tetragonismus id est circuli quadratura per Campanum, Archimedem Syracusanum atque Boetium mathematicae perspicacissimos adinventa*. Apareceu em 1503, em Veneza, editada pelo matemático Luca Gaurico e contém dois dos trabalhos mais populares de Arquimedes − *Medida do círculo* e *Quadratura da parábola*, na tradução latina de Moerbeke[109]. O matemático Tartaglia (1506 - 1557) voltou a imprimir esses tratados de Arquimedes e acrescentou a tradução latina de *Sobre o equilíbrio dos planos* e do Livro I de *Sobre os corpos flutuantes*, dando lugar em 1543 a nova publicação[110]. A tradução de Moerbeke dos dois volumes de *Sobre os corpos flutuantes* veio a acontecer em Veneza no ano 1565.

Outra obra de referência é a *Margarita Philosophica* com a primeira edição em 1503, publicada por Gregor Reisch. Foi a enciclopédia mais importante na Idade Média e início do Renascimento, como se pode provar pelas suas várias edições em 1517, 1535, 1583. Escrita em latim é constituída por doze livros. Cada um dos livros é dedicado às diferentes áreas, respectivamente, a gramática latina, dialéctica, retórica, aritmética, música, geometria, astronomia, física, história natural, fisiologia, psicologia e ética. Esta obra, pelos temas tratados, foi usada para o ensino nas Universidades. No Livro VI trata o tema de geometria prática, incluindo aspectos como a medida da circunferência do círculo e a igualdade entre as áreas de um círculo e um quadrado. Por exemplo, se

[108] Dijksterhuis, *Archimedes*, pp. 37-39.

[109] Marshall Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, Vol. 1, pp. 13.

[110] Dijksterhuis, *Archimedes*, p. 40.

considerar o diâmetro com 14 partes, a circunferência terá 44 e a área do círculo é 154[111]. No apêndice a este Livro é explícita a referência às obras de Arquimedes *Sobre a esfera e o cilindro* e *Medida do círculo*, para além dos comentários de Eutócio de Áscalon[112].

O momento chave para a expansão do conhecimento de Arquimedes na Europa dá-se com a *editio princeps*. Esta edição contém os textos gregos do "manuscrito A", os comentários de Eutócio e a tradução latina de Tiago de Cremona, baseada na tradução de Moerbeke e com as correcções feitas por Regiomontano (Basileia, 1544), publicada por Venatorius[113].

O texto desta edição, de excepcional importância na História da Ciência, tem o título completo: *Archimedis Syracusani Philosophi ac geometrae excellentissimi Opera, quae quidem extant, omnia, multis iam seculis desiderata... Adiecta quoq[ue] sunt Eutocii Ascalonitae in eosdem Archimedis libros commentaria, item graece & latine nunquam antea excusa.*


ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ
ΤΟΥ ΣΥΡΑΚΟΥΣΙΟΥ, ΤΑ ΜΕΧΡΙ
ARCHIMEDIS SYRACVSANI
PHILOSOPHI AC GEOMETRAE EXcellentissimi Opera, quæ quidem extant, omnia, multis iam seculis desiderata, atq; à quàm paucissimis hactenus uisa, nuncq; primùm & Græcè & Latinè in lucem edita.
Quorum Catalogum uersa pagina reperies.
Adiecta quoq; sunt
EVTOCII ASCALONITAE
IN EOSDEM ARCHIMEDIS LIbros Commentaria, item Græcè & Latinè, nunquam antea excusa.
Cum Cæs. Maiest. gratia & priuilegio ad quinquennium.
BASILEAE,
Ioannes Heruagius excudi fecit,
An. M D X L I I I I.

Figura 15 − Primeira página da edição de 1544

O matemático Frederico Commandino (1509 - 1575) fez outra tradução latina dos textos de Arquimedes, a partir do "manuscrito B" ou de uma cópia, publicada em

[111] *Margarita philosophica*, p. 480.

[112] *Ibidem*, pp. 1281-1317

[113] Marshall Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, Vol. 1, nota 23, pp. 12.

Veneza (1558). Teve uma nova edição (1565), mais completa por incluir a tradução de *Sobre os corpos flutuantes.* No final do século XVI, surgiu uma nova edição latina de Francisco Maurolico (1494 - 1575), matemático e astrónomo italiano, publicada em 1570. Mas, esta edição com o título *Monumenta omnia mathematica* perdeu-se e em 1685 foi reeditada em Palermo[114].

O aparecimento da edição de 1544 marcou um momento crucial na divulgação das obras de Arquimedes e, de facto, as edições arquimedianas multiplicaram-se a partir desta data. Destaquemos a de David Rivault (1571 - 1616), matemático francês, (Paris, 1615), com o apoio do "manuscrito B" e seguindo o modelo da edição de Basileia[115], isto é, apresenta as proposições em grego e latim, com as demonstrações adaptadas em latim. Foi, mais tarde, reeditada em 1626 pelo padre jesuíta Claude Richard[116]. Saliente-se que a edição de 1615 foi importante para a versão latina do matemático inglês Isaac Barrow (Londres, 1675), e para John Wallis editor de *O contador de areia* e da *Medida do círculo* com o comentário de Eutócio (Oxford, 1676).

A edição do matemático italiano Torelli, (Oxford, 1792), publicada após a sua morte, está em conformidade com a edição de Basileia, mas também com dados recolhidos no manuscrito grego designado de *Codex Venetus Marcianus* cccv, do século XV, usado por Regiomontano[117].

É muito provável que existam textos de Arquimedes ainda desconhecidos, mas no final do século XVIII os documentos identificados tinham já ampla divulgação entre os matemáticos europeus, existiam algumas edições em línguas nacionais e a influência no início da ciência moderna era notada.

No final do século XIX, Heiberg contribuiu com novos dados sobre os manuscritos e descobriu a ordem pela qual os textos de Arquimedes terão sido produzidos. Dessa detalhada investigação resultou a publicação, em dois volumes (Leipzig, 1880 - 1881), da obra do matemático grego em grego e latim. Nessa edição incluiu alguns fragmentos do Livro I da obra *Sobre os corpos flutuantes* descobertos no Vaticano em 1828 e que era um dos tratados que continuava em falta, incluindo também os comentários de

---

[114] Dijksterhuis, *Archimedes*, pp. 41-42.

[115] Heath, *The Works of Archimedes*, p. xxix.

[116] Claude Richard foi um cosmógrafo francês, professor, em Madrid, no Colégio Imperial da Companhia de Jesus. Consulta *in* http://es.wikipedia.org/wiki/Reales_Estudios_de_San_Isidro; http://fr.wikipedia.org/wiki/Claude_Richard_(jésuite) [15 Janeiro 2014]

[117] Heath, *The Works of Archimedes*, pp. xxvi- xxx.

Eutócio, bem como a descrição das fontes e versões consultadas. No entanto, desse processo de investigação publicou uma segunda edição em 1910 - 1915.

Em 1897 surgiu a tradução de Heath para inglês, com base no trabalho de Heiberg. Posteriormente com o aparecimento dos novos textos do "manuscrito C" e que Heiberg fotografou em 1906, foi possível a Heath, em 1912, publicar, na forma de apêndice às obras de Arquimedes, o importante tratado *O método*.

Em francês, uma tradução das obras completas de Arquimedes a partir do grego, foi a do belga Paul Ver Eecke (Paris, Bruxelas, 1921), incluindo uma introdução e diversas notas[118].

A mais recente edição das obras de Arquimedes é a que está a cargo de Reviel Netz (2004), e da qual só saiu o Volume I. É a primeira edição a incluir, em inglês, os comentários de Eutócio, além de reflectir as evidências reveladas no palimpsesto de Arquimedes.

[118] Dijksterhuis, *Archimedes*, p. 45.

CAPÍTULO 2

TRANSMISSÃO DAS OBRAS DE ARQUIMEDES EM PORTUGAL

Tendo recordado, de maneira sucinta, no capítulo anterior, os factos essenciais às obras de Arquimedes e sua divulgação, importa agora tentar esclarecer como elas foram conhecidas em Portugal, em que épocas, porque vias, e em que contextos. Esta dissertação não pretende ser um estudo definitivo e exaustivo desta questão mas pretende, pela primeira vez, deixar claro os traços fundamentais dessa disseminação.
No que diz respeito ao período medieval, não nos foi possível identificar elementos concretos que provem o estudo e utilização de contexto português. Não damos, de maneira nenhuma, esta questão por encerrada, mas no âmbito deste nosso trabalho, não nos foi possível estabelecer qualquer facto de maneira incontroversa.

Se para o período medieval não detectámos vestígios da difusão de Arquimedes no nosso país, a situação mudou radicalmente logo no início do século XVI. Aliás, muda de maneira verdadeiramente notável.

Uma primeira indicação do conhecimento de Arquimedes em Portugal pode obter-se muito facilmente examinando a existência das suas edições impressas em bibliotecas portuguesas.

2.1. Textos arquimedianos existentes em Portugal

O afastamento geográfico de Portugal não foi obstáculo a que algumas das primeiras edições com os trabalhos de Arquimedes chegassem ao conhecimento de portugueses. Existem exemplares em Bibliotecas portuguesas que passamos a destacar.

Na Biblioteca Nacional de Portugal (BNP):

− a enciclopédia *Margarita Philosophica*, edição de 1535, editada pelo matemático parisiense Orôncio Fineu com um apêndice sobre a *Quadratura do círculo*[119];

− a primeira edição (Basileia, 1544) das Obras de Arquimedes, isto é, a já referida *editio princeps*, *Archimedis Syracusani Philosophi ac geometrae excellentissimi Opera*[120].

[119] O antigo possuidor deste exemplar (Cota RES. 3417 V) foi a Companhia de Jesus (Colégio de S. Paulo, Braga).

[120] Cota RES. 934 A.

Ainda na BNP é possível encontrar:

− *Paschasii Hamelli regii mathematici Commentarius in Archimedis Syracusani praeclari mathematici libru[m] de numero arenae, multis locis per eundem Hamellium emendatum* (Paris, 1557);

− *De sphaera et solidis sphaeralibus, libri duo: in quibus Archimedis doctrina de sphaera et cylindro denuo componitur, latius promovetur et in omni specie solidorum, quae vel circa, vel intra sphaeram, ex conversio,* Evangelista Torricellius.

No catálogo do Livro Antigo da Biblioteca Geral da Universidade de Coimbra (BGUC) − Biblioteca Joanina, estão referenciadas as seguintes obras de Arquimedes:

− *De iis qvae vehvntvr in aqva* (1565); edição e tradução de Frederico Commandino;

− *Opera quae extant* (Paris, 1615);

− *Archimedis Opera Apollonii Pergaei Conicorum libri IIII. Theodosii Sphaerica*. (Londres, 1675).

Em resumo: numa breve pesquisa encontrámos, em bibliotecas portuguesas, as mais importantes edições de Arquimedes.

2.2. Portugueses divulgadores de Arquimedes

No início do século XVI, o princípio da hidrostática, quadratura do círculo e da parábola − temas arquimedianos populares − suscitaram o interesse e foram estudados por homens da ciência portuguesa, à semelhança do que acontecia noutros países. Dois nomes merecem referência especial: Francisco de Melo e Pedro Nunes, cujos trabalhos tiveram o mérito de serem reconhecidos além fronteiras.

Francisco de Melo escreveu um comentário a um texto pseudo-arquimediano transformando-o num trabalho científico coerente[121].

Pedro Nunes, em especial, numa obra de crítica ao matemático francês Orôncio Fineu, deu a conhecer, correctamente, um dos tratados mais populares do matemático grego.

Sobre os contributos destes portugueses daremos, em seguida, alguns detalhes.

[121] Marshall Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, Vol. 3, Part III, The American Philosophical Society, Philadelphia, 1978, pp. 1074-1075

2.2.1. Francisco de Melo, o problema da coroa e o tratado *Sobre os corpos flutuantes* de Arquimedes

Uma das curiosidades muito divulgadas sobre Arquimedes está associada ao conhecido problema da coroa − história relatada por Vitrúvio no *Tratado de Arquitectura*, com contornos de lenda, repetida ao longo dos tempos e, muitas vezes, conotada como uma anedota.

Segundo Vitrúvio, o Rei Herão encomendou uma coroa em ouro que deveria ser colocada num templo, tendo dado a quantidade certa para a respectiva construção. O artesão entregou a obra ao Rei, mas perante a suspeita de ter retirado uma parte do ouro e substituído pelo peso equivalente em prata, Herão, sem meios para provar aquela situação, pediu a Arquimedes que clarificasse o caso. O problema teria de ser solucionado sem danificar a coroa − não poderia transformá-la num corpo de forma regular, encontrando assim o volume para calcular a sua densidade.

Este problema ganhou total popularidade que merece um maior desenvolvimento.

a) O problema da coroa

A questão central que se colocava era a de saber qual a percentagem de ouro e de prata existente na coroa, que supostamente deveria ter sido feita apenas de ouro.

Conta Vitrúvio que Arquimedes[122],

> […] pensando nisso, ao dirigir-se aos banhos públicos, tendo entrado na banheira, reparou que saía dela uma quantidade de água equivalente ao seu corpo, à medida que este se ia introduzindo.

Segundo o relato de Vitrúvio a descoberta teria acontecido durante o banho, tendo o matemático corrido para a rua aos gritos de "*Eureka! Eureka!*" – expressão muito conhecida e difundida desde esse tempo.

Este problema não foi abordado em qualquer das obras do matemático siracusano e o método apontado por Vitrúvio apresenta dificuldades práticas. Admitindo-se que Arquimedes tenha estudado este problema, o processo descrito é desajustado, sendo por isso improvável que o tenha usado. Por um lado, o conceituado matemático não ficaria surpreendido por a altura da água do banho se alterar e, por outro lado, parece ser

[122] Vitrúvio, *Tratado de Arquitectura*, pp. 327-328.

estranho, que para tomar banho, alguém enchesse uma banheira até à borda, pois só serviria para molhar o chão.

No caso da coroa, a experiência de mergulhar um peso num fluido iria proceder-se em três fases sucessivas: para uma coroa de ouro puro, para outra de prata pura e para a coroa que fora construída. Para cada situação analisaria as mudanças operadas na altura do fluido. Este método não seria eficaz para diferenciar a percentagem de ouro e de prata na coroa, visto que se fosse considerado um modelo de coroa com cerca de vinte centímetros de diâmetro, a subida do nível do fluido seria imperceptível num recipiente adequado e não permitiria qualquer conclusão[123].

Atendendo a que o método descrito carece de credibilidade, é mais provável que Arquimedes tenha usado o princípio da hidrostática enunciado no tratado *Sobre os corpos flutuantes*.

O interesse pelo tema da hidrostática, suscitado entre os eruditos europeus no início do século XVI, pode ter sido a razão que conduziu ao debate em torno deste problema.

Um português, Francisco de Melo, é quem no início do século XVI dá um relevante contributo para a compreensão do problema da coroa[124].

A fraca credibilidade do método descrito por Vitrúvio levou a que alguns autores tivessem sugerido que Arquimedes tenha seguido um método baseado em pesagens, usando uma balança hidrostática.

Contudo, existem dois documentos antigos que podem ajudar ao seu esclarecimento. Um texto do século XII − *Mappae Clavicula* − com instruções sobre a forma de fazer pesagens dentro de água e um poema latino, sobre pesos e medidas, do século IV ou V d.C. − *Carmen de ponderibus et mensuris* − descrevendo "o uso da balança hidrostática para resolver o problema da coroa, sendo esse método explicitamente atribuído a Arquimedes"[125].

De modo breve daremos uma explicação possível do método.

Sejam W o peso da coroa, w_1 e w_2 os pesos de ouro e prata incluídos na coroa, respectivamente.

---

[123] Roberto A. Martins, «Arquimedes e a coroa do rei: problemas históricos» *in Colecção Explorando o Ensino*, Vol. 7 - Física, Brasília: Ministério da Educação, 2005, p. 183.

[124] António Ribeiro dos Santos, «Memória da Vida e Escritos de D. Francisco de Melo», *in Memórias de Litteratura Portugueza*, Academia Real das Sciencias de Lisboa, Tomo VII, 1806, Lisboa, pp. 246-247.

[125] Roberto A. Martins, «Arquimedes e a coroa do rei: problemas históricos», pp. 184-185.

Então:

$$W = w_1 + w_2 .$$

Primeiro, tomemos um peso W de ouro puro. A perda aparente de peso é, portanto, igual ao peso do fluido deslocado. Seja F_1 esse peso. Logo o peso do fluido deslocado para um peso w_1 de ouro será dado por $\frac{w_1}{W} \times F_1$.

Repetindo a experiência para um peso W de prata pura, a perda aparente de peso será igual ao peso do fluido deslocado. Seja F_2 esse peso. Então, analogamente, o peso do fluido deslocado para um peso w_2 de prata será dado por $\frac{w_2}{W} \times F_2$.

Por fim, para a coroa construída com uma percentagem de ouro e outra de prata, seja F a perda de peso. Então, o peso do fluido deslocado pela coroa é F .

Segue-se que:

$$F = \frac{w_1}{W} F_1 + \frac{w_2}{W} F_2 \quad \Leftrightarrow \quad w_1 F_1 + w_2 F_2 = W F \quad \Leftrightarrow \quad w_1 F_1 + w_2 F_2 = \left(w_1 + w_2\right) F ,$$

ou seja,

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{F_2 - F}{F - F_1} .$$

Obtém-se, assim, uma relação entre os pesos de ouro e prata puros com os pesos dos fluidos deslocados, em cada tipo de coroa.

Esta é uma importante conclusão deduzida a partir de um processo mais credível do que o descrito por Vitrúvio.

b) *Archimedis de incidentibus in humidis* - Comentário de Melo

Além das fontes clássicas para solucionar o problema da coroa, importa olhar com mais detalhe o texto medieval *De ponderibus Archimenidis* ou também designado por *De incidentibus in humidis*. Este trabalho, referido no Capítulo 1, é essencialmente uma obra de hidrostática e interessou os estudiosos do Renascimento. Continha uma solução para problemas em que o objectivo era determinar os volumes individuais das substâncias que constituem uma mistura, a partir de volumes iguais para a mistura e para cada uma das componentes[126].

Recordemos que o texto pseudo-arquimediano é conhecido a partir de fontes árabes.

O matemático francês João de Muris, conhecedor de várias obras de Arquimedes, trabalhou aquele texto, fez alterações e corrigiu erros que existiam no documento medieval. Dá a conhecer o seu trabalho na obra *Quadripartitum numerorum* (1343), apresentando um resultado que permitia calcular a razão entre os volumes das substâncias da mistura. Muris relaciona esta questão com o problema da coroa, mas não tenta dar uma regra para determinar os pesos.

No início do século XVI, segundo Clagett, é provável que tenha sido o humanista do renascimento Andreas Coner (1511 - 1551) a fazer várias correcções em *De ponderibus Archimenidis*, entre 1508 e 1513. Nos primeiros anos do século XVI um manuscrito deste tratado estava em Veneza, facto confirmado por lá terem surgido duas edições (1518 e 1519) com o tratado *Sphaera* de Sacrobosco. Deste modo o pseudo-arquimediano foi divulgado entre os estudiosos. Infelizmente, para a edição impressa foi usado um manuscrito medieval, com erros, em vez do texto corrigido por Coner. Além disso, os documentos disponíveis mesmo que correctos, não transmitiam clareza nas demonstrações do documento medieval. A resposta às dúvidas suscitadas vem do matemático português Francisco de Melo[127].

D. Francisco de Melo nasceu em Lisboa em 1490, filho de famílias nobres. Estudou na Universidade de Paris como bolseiro, a cargo do Rei D. Manuel I, situação de que beneficiou entre 1514 - 1517, prolongada até 1520 conforme consta de Alvará de Fevereiro de 1517 e outro de 1519.

Licenciado em Teologia pela Universidade de Paris, estudou matemática no *Collège de Montaigu* com Gaspar Lax[128] e com o professor de Artes e Medicina, o médico Pierre Brissot. Francisco de Melo obteve o grau de Mestre em Artes. De regresso a Portugal, ocupou o cargo de mestre dos filhos do Rei D. João III, esteve em Évora para ensinar o infante D. Henrique e foi reconhecido como um sábio do seu tempo, pelos

[126] Marshall Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, Vol. 3, Part III, p. 1071.

[127] *Ibidem*, pp. 1072-1074.

[128] Gaspar Lax dedicou a sua obra *Arithmetica speculativa* (Paris, 1515) ao "insigne matemático", referindo-se a Francisco de Melo. Consulta em http://www.joaquimdecarvalho.org/artigos/artigo/92-Sobre-o-humanismo-portugues-na-epoca-da-renascenca-/pag-7.

conhecimentos em matemática, astronomia, cosmografia, mecânica e óptica[129]. Foi Reitor da Universidade de Lisboa e pode ter abandonado os estudos em matemática, mas pode admitir-se a sua influência se tenham feito sentir no então jovem Pedro Nunes, que regressado de Salamanca, abandonou a medicina, para se dedicar à matemática[130].

Foi nomeado, por D. João III, Bispo de Goa (1534), mas não tomou posse por ter falecido em 1536, estando sepultado na Igreja do Convento de S. João Evangelista, em Évora.

Francisco de Melo, conhecendo o tratado de Arquimedes *De ponderibus Archimenidis* ou do equilíbrio dos sólidos mergulhados nos fluidos, elaborou os seus próprios comentários, de que existe um exemplar na BNP com o título *Archimenidis de incidentibus in humidis cum Francisci de Mello commentariis* (*Comentários de Francisco de Melo ao Tratado dos Corpos Flutuantes de Arquimedes*)[131]. Este é um trabalho de matemática − um manuscrito com quinze definições, quatro postulados e sete proposições, sendo cinco com teoremas e duas com problemas. Inclui figuras com a finalidade de clarificar os comentários feitos.

O trabalho de Melo foi mais tarde traduzido para o francês pelo matemático Forcadel (Paris, 1565). Presentemente está em curso a publicação da edição com a tradução portuguesa, notas e estudo pelos investigadores Bernardo Mota e Henrique Leitão.

Segundo Clagett, Melo transformou o texto medieval, *De ponderibus Archimenidis*, num trabalho coerente que terá começado a preparar em Paris. Francisco de Melo manteve a estrutura do documento medieval, mas fez alterações que se aproximaram das ideias seguidas por Muris − alterou a ordem de proposições, deu novas demonstrações das proposições e acrescentou corolários e lemas adequados[132]. Estas alterações mostram a boa compreensão que Melo tinha do texto disponível. Clagett defende que Melo poderá ter lido a obra de Muris em Paris, justificando assim o facto

[129] António Ribeiro dos Santos, «Memória da Vida e Escritos de D. Francisco de Mello», pp. 237-249.

[130] Pedro Nunes, *De Erratis Orontii Finaei*, Obras de Pedro Nunes, Vol. III, Academia das Ciências de Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2005, p. 297.

[131] Desse documento científico existem dois manuscritos: o original no Arquivo da cidade alemã de Stralsund e uma cópia na Biblioteca Nacional de Portugal (COD. 2262, f. [101-108]), doada por D. Fr. Manuel do Cenáculo (1724-1814, O.T.R.)

[132] Marshall Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, Vol. 3, Part III, pp. 1076-1077.

de ter seguido as mesmas propostas de alteração, aspecto irrelevante para classificar o trabalho do português como "impressionante"[133].

O comentário do português ao texto medieval diferencia-se dos anteriores por invocar proposições de os *Elementos* nas suas demonstrações[134]. Note-se, ainda, que o comentário de Melo é, segundo Clagett, o primeiro trabalho a fazer a ligação entre *De ponderibus Archimenidis* com a descrição de Vitrúvio. Na proposição sétima e última do trabalho do português − "num corpo composto de dois, indicar quanto existe de cada um"[135] −, este afirma que o objectivo do seu comentário pode ser lido em Vitrúvio. Com esta declaração ficou explicito a ligação do trabalho de Francisco de Melo com o problema da coroa.

O trabalho de Francisco de Melo termina com uma dedicatória ao Rei D. Manuel I − foi um presente para o Rei que financiou os seus estudos em Paris e, ao mesmo tempo, serviu para atestar o bom desempenho nos estudos feitos na Universidade de Paris.

A influência de Arquimedes é constatada, primeiramente, em Portugal, com Francisco de Melo − matemático de excelência de quem Gil Vicente disse saber "ciência avondo"[136].

Notamos que, apesar de Melo ter realizado a sua investigação e estudo deste pseudo-arquimediano no estrangeiro, possivelmente influenciado por outros trabalhos, deu, sem qualquer dúvida, o seu contributo para a divulgação de Arquimedes no nosso país, além de que o seu trabalho é o primeiro a clarificar algumas das passagens do texto pseudo-arquimediano. Como repara Clagett: o texto de Melo foi fundamental para compreender Arquimedes, pela primeira vez foram feitas, correctamente, as passagens que antes eram lacunares.

2.2.2. Arquimedes na obra de Pedro Nunes

Pedro Nunes é outro português, no século XVI, com excelentes conhecimentos das obras de Arquimedes. Nunes cita resultados de Arquimedes em vários dos seus trabalhos. Este facto não confirma apenas que o português estava plenamente

[133] Marshall Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, vol. 3, Part III, p. 1078.

[134] *Ibidem*, p. 1078.

[135] Tradução portuguesa cedida pelos investigadores Bernardo Mota e Henrique Leitão.

[136] Consulta em http://www.joaquimdecarvalho.org/artigos/artigo/54-Os-descobrimentos-e-a-acao-colonizadora-dos-portugueses-como-fatores-do-progresso-cientifico-e-da-civilizacao/pag-2.

familiarizado com os trabalhos do siracusano mas − o que é bem mais importante − que se envolveu criativamente com esses trabalhos, dando-lhes grande divulgação em Portugal.

A publicação da edição de 1544 da obra de Arquimedes, foi também de grande importância para Nunes, sendo que as suas principais referências são posteriores a esta data. Referiu e citou passagens de *Sobre a esfera e o cilindro* no seu trabalho *Sobre os erros de Orôncio Fineu* (1546) para justificar matematicamente as suas afirmações. É também nesta obra que deu, pela primeira vez, na história da ciência, a justificação correcta para a célebre proposição arquimediana de a *Medida do círculo*, citando o conhecimento transmitido por Arquimedes, bem como referindo os comentários de Eutócio àquele tratado. Mais tarde (1566), Pedro Nunes em *Sobre a arte e a ciência de navegar* irá usar outros textos de Arquimedes, nomeadamente o *Arenário*.

Não vamos aqui fazer uma discussão exaustiva de todos os passos em que Pedro Nunes tratou assuntos arquimedianos. Vamo-nos cingir apenas aos casos mais importantes.

1) Pedro Nunes e os Rumos do globo

O tratado com o título *Defensão do Tratado da Rumação do Globo para a Arte de Navegar*, uma das obras de Pedro Nunes que ficaram inéditas, trata de problemas de navegação[137]. Na verdade, trata-se de uma carta dirigida ao Infante D. Luís, onde Nunes respondeu a um bacharel que o criticou acerca de como se deve rumar no globo. Essa foi a forma escolhida para se defender dos enganos apontados.

A resposta de Nunes foi meticulosa, respondeu a cada ponto do seu crítico, usou argumentos matemáticos para sustentar as suas opiniões sobre o assunto e apontar as incoerências no texto do bacharel e a falta de provas para as afirmações que são entendidas como definições. Talvez por essa razão comece por dar a definição de rumo − "linha curva que não repugna aos princípios de geometria haver na superfície do globo".

[137] O tratado foi publicado por Joaquim de Carvalho(Coimbra, 1952) em *Subsídios para a História da Filosofia e da Ciência em Portugal*, IV. O manuscrito deste tratado foi descoberto na Biblioteca Nacional de Florença (1949) e foi o investigador Joaquim de Carvalho que, ao publicá-lo, lhe deu o referido título.

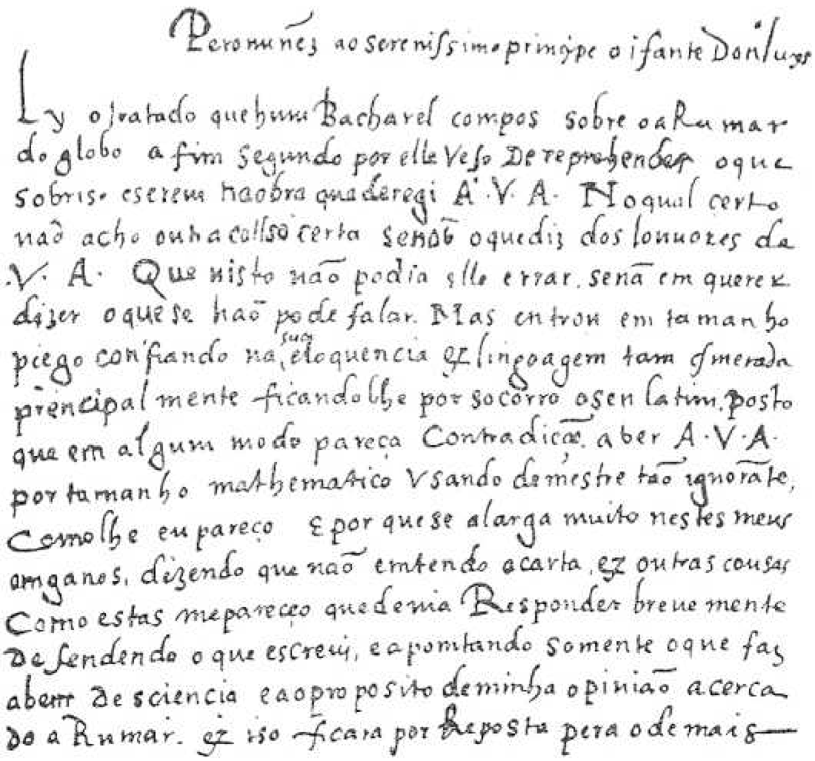

Pero nunez ao serenissimo principe o ifante Don luys
Ly o tratado que hum Bacharel compos sobre o aRumar
do globo a fim segundo por elle vejo de reprehender o que
sobr'isso escrevem na obra que dereçi A. V. A. No qual certo
não acho outra cousa certa senão o que diz dos louvores da
V. A. Que nisto não podia elle errar, senão em querer
dizer o que se não pode falar. Mas entrou em tamanho
pego confiando na sua eloquencia e linguagem tam esmerada
principalmente ficandolhe por socorro o seu latim, posto
que em algum modo pareça contradição aver A. V. A.
por tamanho mathematico usando de mestre tão ignorante,
como lhe eu pareço. E porque se alarga muito nestes meus
enganos, dizendo que não entendo a carta, e outras cousas
como estas me pareceo que devia responder brevemente
defendendo o que escrevi, e apontando somente o que faz
a bem de sciencia e ao proposito de minha opinião acerca
do aRumar. e isso ficara por reposta pera o de mais —

Figura 16 - Excerto da carta dirigida ao Infante D. Luís

Nunes referiu que o "dito bacharel" punha linhas direitas iguais a arcos, coisa que não se podia demonstrar pela matemática. Assim, chamou a atenção da impossibilidade de rectificar uma circunferência, citando o teorema de Arquimedes da *Medida do círculo*. Revelou a preocupação de justificar as suas asserções no conhecimento de Arquimedes, referindo em concreto que[138]:

> Arquimedes trabalhou muito nisto e não o conseguiu por que somente demonstrou que a proporção que tem a circunferência do círculo ao seu diâmetro é tal que o contém três vezes e menos que uma sétima parte do diâmetro, mas mais que dez partes de 71 em que se reparte o diâmetro […] Mas ainda não é sabido que parte é esta que havemos de acrescentar. E por esta razão não sabemos fazer direita igual à curva […].

Além desta importante referência, Nunes relacionou este aspecto com a impossibilidade de quadrar o círculo, notando que Arquimedes tinha usado uma curva −

[138] *Subsídios para a História da Filosofia e da Ciência em Portugal*, Coimbra, 1952, p. 26

a espiral − para encontrar a rectificação de uma circunferência, passo essencial para obter a quadratura do círculo[139].

Estamos, pois, perante um trabalho de Nunes onde as referências arquimedianas são frequentes para o desenvolvimento dos seus raciocínios. Tais referências indiciam que, por volta de 1540, Nunes[140], tem conhecimento e é um divulgador da obra de Arquimedes.

2) Pedro Nunes e *Sobre os Erros de Orôncio Fineu*

a) A quadratura do círculo e as propostas de solução de Orôncio Fineu

Possivelmente nenhum problema como o da rectificação da circunferência ou o da quadratura do círculo provocou em matemáticos ou em outros estudiosos, tão elevado fascínio. Esse problema ocupou geómetras de todos os tempos e foi o pretexto para muitos estudos e publicações.

Entre os textos publicados encontramos *Protomathesis* (1532) − uma compilação publicada por Orôncio Fineu (1494 - 1555), professor de matemática no *Collège Royal* em Paris, entre em 1531 até à sua morte[141]. Renuiu vários trabalhos sobre diferentes questões matemáticas, fez referência a resultados do grande matemático siracusano e apresentou, com erros diversos, a sua própria proposta de solução para aquele problema clássico.

Mais tarde, Orôncio regressaria ao problema em *Da Quadratura do círculo* (1544), numa nova tentativa de resolução, mas voltou a errar, contrariando resultados alcançados por Arquimedes[142]. Por conseguinte, recebeu críticas, algumas violentas, dos seus pares[143].

---

[139] Pedro Nunes, Folhas 36-37 do manuscrito.

[140] Joaquim de Carvalho apresentou razões para defender que o trabalho terá sido redigido antes de 1544 *in Subsídios para a História da Filosofia e da Ciência em Portugal*, pp. XXXI-XXXII.

[141] Pedro Nunes, *De Erratis Orontii Finaei*, pp. 267-268.

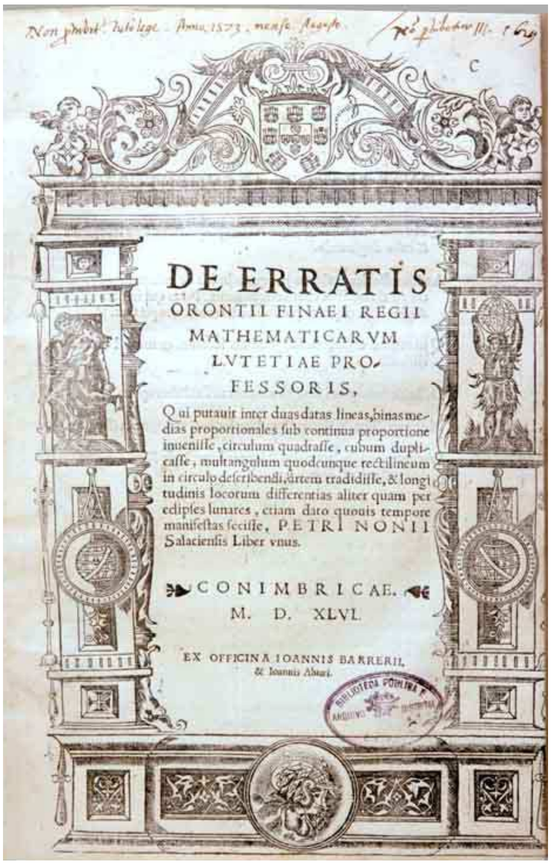
[142] *Ibidem*, p. 274-275.

[143] Jean Borrel, provável discípulo de Fineu, foi outro crítico preponderante. A sua primeira crítica surge em 1554 não terá produzido efeito sobre Fineu e, mais tarde, a sua *De quadratura circuli* é posterior ao falecimento de Fineu, donde a obra de Nunes é a única em vida de Fineu. Borrel refuta aqueles que afirmam ter encontrado a solução da quadratura do círculo, incluindo o seu mestre. Aqui os ataques são mais agressivos pois Fineu insistiu nos erros e contrariou Arquimedes no que respeita ao valor aproximado de π, *in* "Fine, Oronce" Complete Dictionary of Scientific Biography, 2008. Consulta em: http://www.encyclopedia.com/doc/1G2-2830904877.html [09 Fevereiro 2014].

Em Portugal, Pedro Nunes foi um desses críticos. Publicou *De erratis Orontii Finaei* (*Sobre os Erros de Orôncio Fineu*) − Coimbra, 1546 −, com as refutações ao trabalho de Fineu. Trata-se da primeira crítica em que os ataques ao professor parisiense são formulados com argumentos matemáticos, de forma detalhada e num estilo acutilante e devastador[144].

b) Pedro Nunes refuta Orôncio Fineu

Nunes preparou-se cientificamente para responder ao professor parisiense. Usava, como fontes, nas suas próprias obras, os textos mais considerados − os *Elementos* de Euclides e o *Almagesto* de Ptolomeu −, bem como as últimas novidades. Nunes tinha já estudado Arquimedes e Regiomontano[145], estava bem documentado sobre a questão da quadratura do círculo.



DE ERRATIS
ORONTII FINAEI REGII
MATHEMATICARVM
LVTETIAE PRO-
FESSORIS,
Qui putauit inter duas datas lineas, binas medias proportionales sub continua proportione inuenisse, circulum quadrasse, cubum duplicasse, multangulum quodcunque rectilineum in circulo describendi, artem tradidisse, & longitudinis locorum differentias aliter quam per eclipses lunares, etiam dato quouis tempore manifestas fecisse, PETRI NONII Salaciensis Liber vnus.

CONIMBRICAE.
M. D. XLVI.

EX OFFICINA IOANNIS BARRERII, & Ioannis Aluari.

Figura 17

---

[144] Marshall Clagett, *Archimedes in the middle Ages*, Vol. 3, Part III, p. 1177, nota 15.

[145] Joaquim de Carvalho, *in* Pedro Nunes, *De Erratis Orontii Finaei*, p. 254.

Para a sua resposta a Fineu, poderá ter utilizado obras como o *Tetragonismus* (1503) que inclui as traduções de Moerbecke da *Quadratura da parábola* e da *Medida do círculo* de Arquimedes[146]. Além disso, Nunes já se tinha referido ao matemático siracusano no seu trabalho *De Crepusculis* (1542). Mas, a partir de 1544, com a publicação das obras de Arquimedes e os comentários de Eutócio[147], acessíveis em Portugal, o conhecimento de que passa a dispor é muito grande.

Sobre os Erros de Orôncio Fineu, focado na refutação aos textos do professor parisiense, é o trabalho de um matemático muito rigoroso, excepcionalmente competente, e suficientemente seguro do seu conhecimento para desafiar um dos nomes mais respeitados entre os matemáticos europeus.

A obra do português foi conhecida na Europa[148] e serviu o propósito de, por um lado mostrar como Orôncio falhou nos seus raciocínios e, por outro lado, o de explicar, de um ponto de vista pedagógico, questões científicas relevantes no seu tempo[149]. Nunes usou argumentação de cariz matemático para fundamentar as suas opiniões.

Um dos erros de Orôncio aparece na determinação das duas meias proporcionais em proporção contínua, dados dois segmentos de recta. Isto é, admitiu ter resolvido este problema na hipótese de os segmentos de recta serem os lados dos quadrados, inscrito e circunscrito, a um dado círculo, sendo uma das meias proporcionais o lado do quadrado de área igual à do círculo.

O matemático parisiense apresentou três modos diferentes para justificar a sua afirmação. No entanto, cometeu erros baseados em pressupostos falsos e contra Arquimedes, pelo que Nunes mostrará tratar-se de uma falsa invenção[150].

c) Orôncio não quadrou o círculo

Um dos erros consistiu em utilizar o resultado da Proposição 2 de a *Medida do círculo*, de Arquimedes. Como vimos no Capítulo I, aceitar esse enunciado significa considerar

---

[146] Pedro Nunes, *De Erratis Orontii Finaei*, p. 310.

[147] *Ibidem*, p. 303.

[148] Teve duas edições em vida de Pedro Nunes (1546 e 1571) e um terceira edição em 1592, *in*, Anabela Simões Ramos, *O "De erratis Orontii Finaei" de Pedro Nunes*, Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, Coimbra, 1998, p. 37.

[149] Pedro Nunes, *De Erratis Orontii Finaei*, p. 299.

[150] *Ibidem*, p. 174.

$\pi = \frac{22}{7}$, o que não corresponde à verdade. Naturalmente, partindo de uma falsidade, os erros matemáticos far-se-ão sentir nos cálculos subsequentes, mesmo que outros não existam.

Orôncio seguiu o enunciado da segunda proposição, não foi rigoroso nos cálculos e, por conseguinte, falhou na quadratura do círculo. Esses foram erros comuns a dois dos métodos inventados.

No primeiro método, e em conformidade com o enunciado divulgado da proposição de Arquimedes, o professor parisiense determinou as duas meias proporcionais entre 14 e 7, respectivamente, a área do quadrado circunscrito e a área do quadrado inscrito no círculo dado. Isto é:

$$\frac{14}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{7}.$$

Sendo x a primeira meia proporcional, considerou ser este o valor comum para a área do quadrado e do círculo. Obteve:

$$x = \sqrt[3]{1372}.$$

A seguir, Fineu afirmou que x era igual a 11. Trata-se de mais uma aproximação grosseira, porque $11^3 = 1331$. Assim, a área do círculo não poderá ser igual à área do quadrado de lado igual a 11. Logo, Orôncio não quadrou o círculo.

Num segundo método, os erros cometidos são semelhantes. Voltou a considerar $\pi = \frac{22}{7}$, supôs a área do quadrado circunscrito a um círculo igual a 196 partes, donde concluiu correctamente a área do quadrado inscrito (98) e calculou a área do círculo igual a 154, em conformidade com a segunda proposição de Arquimedes.

De seguida, admitiu que $9\frac{17}{18}$ é aproximadamente igual a $\sqrt{98}$ e determinou as duas meias proporcionais entre as medidas dos lados dos dois quadrados. Isto é:

$$\frac{14}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{9\frac{17}{18}}.$$

Sendo x a primeira meia proporcional, considerou ser este o valor para o lado do quadrado cuja área será 154 partes. Obteve:

$$x = \sqrt[3]{1949\frac{1}{9}}.$$

Orôncio afirmou que o valor mais próximo de $\sqrt{154}$ é $12\frac{5}{12}$. Por outro lado, considerou $\sqrt[3]{1949\frac{1}{9}} = 12\frac{12}{30}$, concluindo que $12\frac{12}{30}$ correspondem quase a $12\frac{5}{12}$.

Fazendo esta afirmação, Fineu pensou que podia desprezar certas quantidades e assumiu estes valores como iguais. O professor parisiense falhou de novo e, por isso, não quadrou o círculo.

Face a esta falta de rigor, Pedro Nunes deixou o comentário[151]:

> Em tudo isto há mais motivo de risota pelos cálculos do que ensejo de refutação dos argumentos.

Mas Nunes interroga-se sobre a forma de raciocinar de Orôncio neste segundo método. Considerando $\pi = \frac{22}{7}$, no primeiro método tinha já concluído que a área do quadrado igual ao círculo era $\sqrt[3]{1372}$. E, agora, como é que podia afirmar que a área do círculo era igual à área do quadrado de lado $12\frac{12}{30}$, se $\sqrt{154}$ (aproximadamente igual a $12\frac{5}{12}$) é maior do que $12\frac{12}{30}$?

A resposta de Nunes surge através do cálculo das duas meias proporcionais entre as áreas dos quadrados circunscrito e inscrito no círculo. Obtém o valor $\sqrt[3]{3764768}$ para a área do quadrado igual ao círculo. Mas, a área do círculo igual a 154, deveria ser também o valor da área do quadrado. Podemos escrever $154 = \sqrt[3]{154^3} = \sqrt[3]{3652264}$. Assim, pela demonstração de Arquimedes, o quadrado é maior do que o círculo e Orôncio não quadrou o círculo.

Pedro Nunes prossegue na sua crítica focando-se, agora, no terceiro método usado por Fineu. Por este processo, pretendia o professor parisiense mostrar, contra Arquimedes, que afinal $\pi > \frac{22}{7}$. Nesta demonstração, Orôncio vai contra o que ele próprio tinha concluído pelo primeiro processo. Tinha admitido, de acordo com Arquimedes, que o quadrado estava para o círculo inscrito na razão de 14 para 11. Por conseguinte, tinha encontrado um quadrado igual ao círculo de área $\sqrt[3]{1372}$, muito

[151] Pedro Nunes, *De Erratis Orontii Finaei*, p. 174.

próxima de 11. Agora, no terceiro método, opondo-se a Arquimedes, afirmava que aquele valor comum da área do círculo e do quadrado era quase igual a $11\frac{1}{9}$.

Orôncio errou porque considerou números tirados de uma tábua de senos do livro de Ptolomeu, o *Almagesto*, mas não a utilizada por Arquimedes[152]. Daqui vem o erro. Pelos cálculos de Orôncio, o comprimento da circunferência será $22\frac{2}{9}$ por saber que a área de qualquer quadrado está para a área do círculo inscrito como o quádruplo do diâmetro para o comprimento do mesmo círculo. O valor encontrado é menor do que o correcto.

Isto é, sendo x comprimento da circunferência, temos:

$$\frac{14}{11\frac{1}{9}} = \frac{28}{x} \Leftrightarrow x = 22\frac{2}{9}.$$

Ao determinar a razão da circunferência para o diâmetro encontra:

$$\frac{22\frac{2}{9}}{7} = \frac{200}{63} = 3\frac{11}{63} > 3\frac{1}{7}.$$

Enquanto Arquimedes usou um polígono regular de 96 lados, Orôncio usou um polígono de 384 lados iguais, isto é, fez a duplicação de lados do polígono mais duas vezes. Recorreu a uma tábua de senos e usou números inferiores às raízes exactas, concluindo que a razão da circunferência para o diâmetro é menor do que $3\frac{10}{71}$, contrariando a demonstração de Arquimedes[153].

O professor parisiense errou no raciocínio por ter admitido que era indiferente tomar raízes quadradas exactas ou raízes um pouco maiores. Ora, o que Arquimedes fez para concluir que a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro é menor do que $3\frac{1}{7}$ foi considerar sempre números inferiores às raízes exactas. Deste modo, ao considerar um valor menor do que o valor exacto, pôde concluir, por maioria de razão, que aquele quociente é menor do que o valor considerado. De modo análogo, para concluir que a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro é maior do que $3\frac{10}{71}$, Arquimedes considerou sempre números superiores às raízes exactas.

---

[152] Anabela Simões Ramos, *O "De erratis Orontii Finaei" de Pedro Nunes*, pp. 103-106.

[153] Pedro Nunes, *De Erratis Orontii Finaei*, p. 187.

Logo, ao considerar um valor maior do que o valor exacto, pôde concluir, sem perigo de errar, que aquele quociente é maior do que o valor considerado.

Em resumo, Pedro Nunes mostrou que Orôncio não quadrou o círculo nem achou a linha recta igual à circunferência, desenvolveu as suas ideias, contra Arquimedes, afirmando que a razão entre o comprimento da circunferência e o diâmetro era maior do que a tripla sesquissétima ($3\frac{1}{7}$), ou seja, revelou não compreender a Proposição 3 *Da Medida do Círculo*.

Numa atitude pedagógica, Nunes não se limita a dizer que Orôncio errou, e, na mesma obra, publicou a demonstração arquimediana da Proposição 3 corrigida com base nos cálculos encontrados nos comentários de Eutócio[154].

Na primeira parte demonstrou que a circunferência do círculo continha três vezes o diâmetro e uma fracção pouco menor que $\frac{1}{7}$. Partiu de um hexágono regular circunscrito ao círculo, por sucessivas duplicações do número de lados, chegou ao perímetro de um polígono de noventa e seis lados. Mas, pela 1ª proposição de *Sobre a esfera e o cilindro*, sabia que o comprimento da circunferência era menor do que aquele perímetro. Portanto se a razão entre o perímetro do polígono e o diâmetro da circunferência era menor do que $3\frac{1}{7}$, o mesmo aconteceria, por maioria de razão, entre comprimento da circunferência e o respectivo diâmetro. Nunes apresentou todos os números dos cálculos correctamente, embora na primeira edição tenha aparecido um erro de impressão.

Na segunda parte, Nunes partiu de um hexágono regular inscrito no mesmo círculo e por sucessivas duplicações de lados encontrou o perímetro do polígono de noventa e seis lados inscrito no círculo. Pôde depois concluir, sem erros, a razão entre o perímetro do polígono e o diâmetro da circunferência, de acordo com Arquimedes, isto é,

$$\frac{\text{perímetro do polígono inscrito}}{\text{diâmetro}} > 3\frac{10}{71}.$$

Mas, a circunferência do círculo excede o perímetro do polígono, donde, por maioria de razão, ser válida aquela relação de ordem para a circunferência e o diâmetro.

Ficou assim concluída a correcta demonstração da proposição 3, ou seja:

---

[154] Marshall Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, Vol. 3, Part III, p. 1222.

$$3\frac{10}{71} < \frac{\text{comprimento da circunferência}}{\text{diâmetro}} < 3\frac{1}{7}.$$

Nunes afirmou ainda que, segundo Arquimedes, "a razão da circunferência para o diâmetro é menor que $3\frac{1}{7}$ e maior que $3\frac{1}{8}$"[155]. Ao fazer esta referência indicava aos leitores que estava a seguir a tradução de Tiago de Cremona, pois é aí e não no texto grego que se pode ver aquela afirmação.

Segundo Clagett, o sábio português é o primeiro autor do ocidente, talvez a par com Regiomontano, a compreender, ou pelo menos a explicar as subtilezas de Arquimedes no que diz respeito às aproximações. Antes de Nunes, os matemáticos Fibonacci, Pacioli e Fineu, tinham dado caricaturas da demonstração do matemático siracusano.

Salientamos que, com a publicação desta obra, a difusão do conhecimento de Arquimedes em Portugal, mas também na Europa, faz com que Nunes mereça um lugar de honra entre os estudiosos de Arquimedes na primeira metade do século XVI[156].

A edição de Commandino, em 1558, com todos os números correctos serviu de ponto de partida para, depois de 1560, muitos autores empreenderem o cálculo de π com um elevado número de algarismos[157].

3) Pedro Nunes e o tratado *Sobre a arte e a ciência de navegar*

Esta é uma obra considerada como a mais significativa da história da ciência portuguesa. Publicada em Basileia (1566), trata matematicamente questões da náutica teórica e da astronomia, era destinada a matemáticos, astrónomos e homens de ciência com elevada formação. Foi uma das obras mais divulgadas na Europa e que prestigiou o matemático português.

Vamos apenas identificar alguns passos que citam ou se referem a conteúdos arquimedianos.

Notamos que ao tratar o problema da carta de marear, Nunes afirma que "o rectilíneo não é congruente com o curvilíneo" e sobre a dimensão do círculo de acordo com Arquimedes, considerou a razão $\frac{22}{7}$ para os cálculos seguintes. É, pois, clara a

[155] Pedro Nunes, *De Erratis Orontii Finaei*, p. 187.

[156] Marshall Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, Vol. 3, Part III, pp. 1222-1223.

[157] *Ibidem*, p. 1224.

referência ao preconizado em a *Medida do círculo*. Também sobre os instrumentos com que se tomam as alturas e as distâncias dos astros, volta a usar a razão do círculo para o diâmetro de acordo com Arquimedes[158].

Em questões de astronomia que tratou no Livro II, capítulo 11, recuperou ideias que vinham referidas noutra obra de Arquimedes − o *Arenário*[159].

No capítulo 18, do Livro II, manifestou claramente a intenção de se basear na verdade matemática para calcular a distância do Sol ao meridiano. Aqui aceitou a opinião de Eratóstenes sobre o paralelismo dos raios solares quando estes chegam à superfície da Terra, bem como da sua célebre dimensão do nosso planeta[160].

Outra obra de Arquimedes a que Nunes se referiu foi *Sobre a esfera e o cilindro*. É no Livro II, capítulo 21, a propósito dos conhecimentos necessários para traçar as linhas de rumo. Sabendo que a trajectória do navio não é circular, mas formada por pequenos segmentos de círculos máximos, referiu a proposição 1 do tratado de Arquimedes para justificar, com o conhecimento matemático, qual a distância mais curta entre dois pontos de uma superfície esférica[161].

Nunes no seu tratado *Sobre a arte e a ciência de navegar* tornou evidente o conhecimento que tinha de diversas obras de Arquimedes, certo de que ao referi-las também as divulgava.

2.3. Arquimedes em contexto de ensino - Instituições

No final do século XVI em Portugal o contexto institucional para o ensino e a prática das matemáticas alterar-se-á radicalmente com o aparecimento dos Colégios jesuítas. Pela primeira vez na história portuguesa, alguns desses Colégios forneceram, uma base institucional sólida, estável e duradoura para os estudos matemáticos.

Esta importante alteração acha-se reflectida no modo como as obras de Arquimedes passaram a ser conhecidas entre nós, pois se a primeira fase de divulgação se deveu a dois matemáticos isolados (Melo e Nunes), um dos quais (Melo) estudara em Paris, a

---

[158] Pedro Nunes, *De Arte Atque Ratione Navigandi*, pp. 296-297 e 369.

[159] *Ibidem*, p. 399. Respeitámos a designação de Pedro Nunes para o tratado de Arquimedes, mas no nosso trabalho demos o título *O contador de areia*.

[160] *Ibidem*, p. 441.

[161] *Ibidem*, p. 474.

partir do século XVII a divulgação de Arquimedes vai dar-se sobretudo em contexto de ensino.

A Companhia de Jesus foi a organização que em Portugal assegurou o ensino da matemática, sobretudo depois de a Universidade ter revelado um certo vazio por falta de professores qualificados para o ensino da disciplina. De facto, durante o século XVI, Pedro Nunes é o único matemático, não só em Portugal como em toda a Península Ibérica. Com a morte de Pedro Nunes, o ensino da matemática na Universidade de Coimbra entrou num período muito conturbado, com longos períodos sem professor, por não haver quem ensinasse a disciplina, mesmo ao nível elementar.

Os jesuítas abriram escolas públicas e no que respeita à matemática inauguraram classes: em 1590, a Aula de Esfera no Colégio de Santo Antão (Lisboa); no final do século XVII os estudos matemáticos iniciaram-se no Colégio das Artes (Coimbra) e no Colégio do Espírito Santo (Évora). O ensino nos Colégios era público e as aulas eram abertas quer para alunos internos, quer para alunos externos, à excepção de Coimbra por causa de na Universidade existir, estatutariamente, uma "cadeira de Mathematica".

No final do século XVII, para uma profunda reforma com vista a promover o ensino da matemática nos Colégios jesuítas na Província Lusitana, é redigida a *Ordenação* de Tirso Gonzalez (1624 - 1705), Geral da Companhia de Jesus, em 12 de Abril de1692. Nesse documento com o título "Ordenação para estimular e promover o estudo da Matemática na Província Lusitana", de enorme importância na história da matemática em Portugal, foram especificadas vinte e nove normas, para serem postas em prática pelos professores. As normas deveriam ser seguidas com todo o rigor, o Geral dos jesuítas deveria ser informado dos resultados alcançados. Aos professores cabia o cumprimento estrito das orientações detalhadas com a finalidade de elevar o conhecimento matemático, em particular, deveriam "aspirar sempre às descobertas geométricas das verdades que possam emular a antiguidade de Arquimedes"[162].

Sobre o funcionamento das aulas o quinto ponto da *Ordenação* especificava que[163]

> […] cada um dos nossos filósofos tenha necessariamente para seu uso os seis primeiros livros dos Elementos de Euclides que contêm os elementos de geometria plana. São muito convenientes os que compôs o P. Andreas Tacquet, editados em

[162] Ordenação 26ª de Tirso Gonzalez *in* Luís Saraiva and Henrique Leitão (ed.) *The Practice of Mathematics in Portugal*, Imprensa da Universidade de Coimbra, Coimbra, 2004, p.720.

[163] Ordenação 5ª de Tirso Gonzalez *in* Luís Saraiva and Henrique Leitão (ed.) *The Practice of Mathematics in Portugal*, pp.706-707.

> Antuérpia, Bruxelas e Pádua, junto com os livros décimo primeiro e décimo segundo dos Elementos de Euclides que contêm os elementos de Geometria Sólida, ainda adicionados de uma selecção de Teoremas de Arquimedes. […]

Assim, os alunos tinham de aprender matemática pelo manual do Padre André Tacquet (1612 - 1660) − *Elementa Geometriae Planae ac Solidae, Quibus accedunt selecta Ex Archimede Theoremata* −, publicado em 1654, como testemunho da sua dedicação à Ordem.

A obra de Tacquet, escrita em latim, a partir de os *Elementos* de Euclides, para o ensino da matemática, foi muito divulgada em todos os Colégios jesuítas na Europa. Enquanto obra didáctica apenas incluía alguns dos livros de os *Elementos* de Euclides, a saber: os seis primeiros livros e os livros décimo primeiro e décimo segundo. A estes livros seriam acrescidos, tal como o título do livro indicava, teoremas seleccionados de Arquimedes.

Foi um compêndio, muito popular, com várias edições ao longo dos cem anos seguintes, existindo nas bibliotecas portuguesas diversos exemplares.

2.3.1. A "Aula da Esfera"

As aulas do Colégio jesuíta de Santo Antão foram designadas por "Aula da Esfera" por causa dos temas inicialmente tratados. Foi a mais importante instituição de ensino científico em Portugal, funcionou ininterruptamente entre 1590 e 1759. Foi uma classe de ensino público de disciplinas físico-matemáticas, dando um significativo contributo para os estudos científicos. Criada a pedido directo do Cardeal D. Henrique, foi fundamental no desenvolvimento da Ciência em Portugal e, em particular, na divulgação de Arquimedes[164].

Entre os professores da "Aula da Esfera", encontram-se nomes de prestigiados mestres europeus e nacionais. Referiremos alguns que se destacaram por terem ensinado temas arquimedianos − Henrique Buseu (1618 - 1667), Inácio Vieira (1678 - 1739) e Manoel de Campos (1681 - 1758) −, o que permite confirmar a "Aula da Esfera" como um dos principais canais para o conhecimento de Arquimedes no nosso país.

---

[164] Henrique Leitão, «Sphæra Mundi» *in Sphœra Mundi: A Ciência na Aula da Esfera. Manuscritos Científicos do Colégio de Santo Antão nas Colecções da BNP*, Catálogo da Exposição, Henrique Leitão (Comissário Científico); Lígia Martins (Coordenação), Lisboa, 2008, pp. 21-22.

I. Henrique Buseu e o *Tratado da Estática*

Henrique Buseu (ou Uwens), jesuíta de origem holandesa, de passagem para o Oriente, ficou em Portugal durante quatro anos. Ensinou na "Aula de Esfera" entre 1642 e 1646, tendo depois partido para Goa. Terá ensinado matemática durante aquele período e as suas lições encontram-se transcritas no manuscrito com o título *Tratado de Estática pello P.M. Henrique Buseo da Companhia de Jesus, na Real Academia da Mathematica do Collegio de Stº Antão* (Lisboa, 1645)[165].

Este tratado de Estática está dividido em cinco partes: Centrobárica, Mecânica, Hidrostática, Aeriostática e Pirostática.

Para cada um destes assuntos começou por apresentar algumas definições sobre o que irá seguir-se. Enunciou proposições, corolários e lemas, dando as demonstrações de um ponto de vista físico-matemático, mas, por vezes, apresentou outra versão num estilo mais filosófico, como o próprio a designou.

Poderemos afirmar que nesta obra encontramos um estilo euclidiano, isto é, o autor deu as matérias numa sequência lógica de definições, teoremas e demonstrações.

Figura 18

[165] Biblioteca Nacional de Lisboa - F.G. 4333. Versão electrónica em http://purl.pt/16596.

É ainda curioso notar que, à excepção da primeira parte, encontramos diversos desenhos (cerca de 250) que ilustram as explicações das proposições.

Nesta obra abordou algumas das questões sobre as quais Arquimedes reflectiu. Logo na primeira parte, Centrobárica, tal como o nome sugere, trata da determinação de centros de gravidade de figuras planas e também de sólidos (Capítulo 1). Estes são temas que Arquimedes referiu no Livro I de *Sobre o equilíbrio dos planos*.

Na segunda parte, Mecânica − "uma ciência das melhores, e mais proveitosas da matemática"[166] −, abordou questões relacionadas com várias máquinas úteis para o homem (balança, roldanas, roda dentada). As demonstrações são acompanhadas de figuras auxiliares.

No segundo capítulo desta parte (corolário 7 da proposição 4ª) fez referência ao "célebre dito de Arquimedes"[167] e ao processo de mover grandes pesos com pouca força. Fez, no entanto, uma crítica: Arquimedes "não declarou a qualidade e feitura dos instrumentos como se havia de fazer uma coisa tão estranha" (Figura 19). Mas, o autor prometia que nesta parte do tratado analisaria diversos modos de o efectuar.

No capítulo 3 − Da roldana − começou por dar a definição deste objecto. Recordamos que este é um instrumento a que Arquimedes terá recorrido para construir um sistema constituído por diversas roldanas e que lhe terá permitido resolver o problema do lançamento de um navio ao mar.

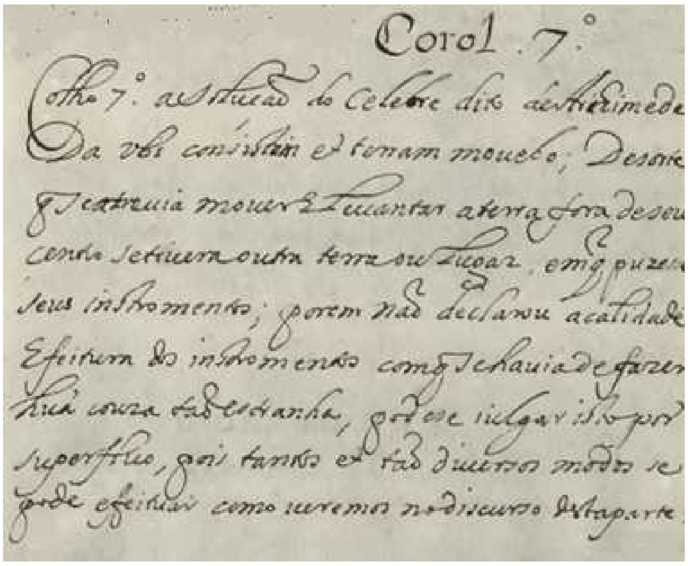


Figura 19

[166] Henrique Buseu, *Tratado de Estática*, p. 29v.

[167] *Ibidem*, p. 61.

Buseu, neste ponto explicou, em várias proposições, as propriedades de roldanas de cada um dos quatro "géneros"[168], exemplificados no desenho reproduzido na Figura 20.

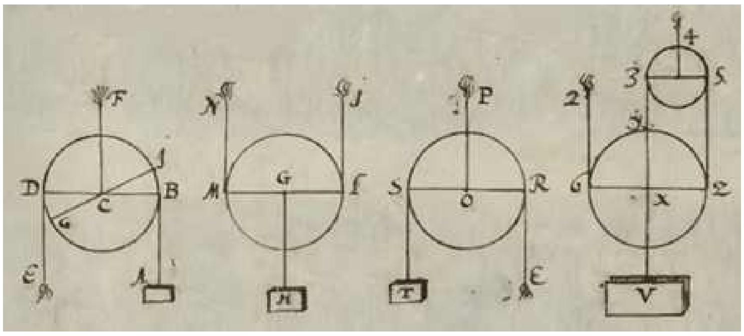
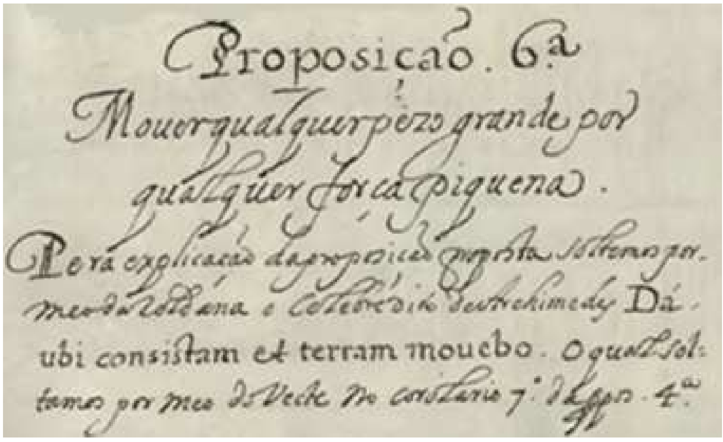


Figura 20

"Mover qualquer peso grande por qualquer força pequena" é o que Buseu se propõe explicar na Proposição 6ª deste capítulo.



Proposicaõ. 6ª

Mouer qualquer pezo grande por qualquer força pequena.

ubi consistam et terram moueho.

Figura 21

Este é um problema que Arquimedes terá resolvido por um sistema de roldanas, e que a esse propósito terá exclamado: "dêem-me um ponto de apoio e moverei o mundo".

O matemático do Colégio de Santo Antão fez cálculos e deu a conhecer a força que deveria ser aplicada pelo homem para resolver o problema.

Retomou o "célebre problema de Arquimedes" no capítulo 4º (Do Timpano e da Roda dentada), na Proposição 3ª e no corolário 2 da Proposição 5ª, neste caso para o resolver por outro caminho mais simples: um processo que levasse a encontrar um

[168] Henrique Buseu, *Tratado de Estática*, pp. 70-82..

sistema de roldanas para mover a Terra. Na Proposição 7ª propôs alguns instrumentos a construir com base em rodas dentadas.

Na 3ª parte[169] − Hidrostática − abordou um dos temas arquimedianos interessantes e inovadores, ao qual Francisco de Melo tinha já dedicado o seu trabalho.

Assim, enunciou a Proposição 3ª:

> Todo o corpo que sendo de igual grandeza com a água, é mais pesado que ela, posto nela descerá ao fundo, e com tanta força com quanta o peso do tal corpo ganha ao peso da água de igual grandeza com ele.

Desta proposição deu o Corolário 5:

> o modo como Arquimedes podia descobrir a mistura de prata que fez o ourives do Rei Herão. Conta Vitrúvio [*Tratado de Arquitectura*] no livro 9 Cap. 3º porém erra nas circunstâncias, nem o modo parece possível do que diz que Arquimedes fez […]

De seguida advertia o leitor de que só daria o modo como se poderá fazer aquela descoberta, com muita exactidão. Todavia, acrescentava quatro lemas e a resolução do corolário 5 que eram necessários.

Considerou a coroa de Arquimedes (AB) misturada de prata e ouro e o objectivo era procurar o peso do ouro (A) e da prata (B).

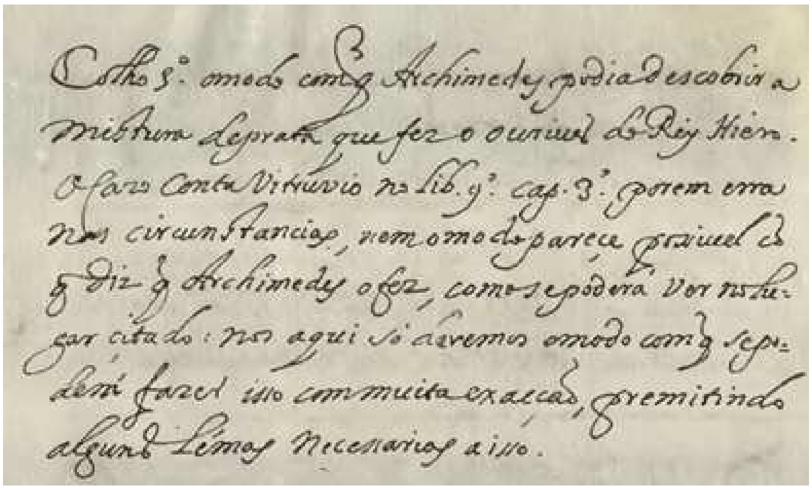

Coroll. 5º o modo como Archimedes podia descobrir a
mistura de prata que fez o ourives do Rey Hieron.
O caso conta Vitruvio no lib. 9º cap. 3º porem erra
nas circunstancias, nem o modo parece possivel do
que diz que Archimedes o fez, como se poderá ver no lu-
gar citado: nos aqui só daremos o modo como se po-
derá fazer isto com muita exacção, premitindo
alguns Lemas necessarios a isto.

Figura 22

[169] Henrique Buseu, *Tratado de Estática*, p. 113v. Esta parte está subdividida em dois capítulos: 1º - das Coisas que nadam sobre água e descem debaixo dela; 2º - Sobre levantar e encaminhar água por diversas vias.

Buseu parece ter adoptado o processo exposto por Melo: imaginou dois outros corpos C de ouro (puro) e D de prata (pura) e descreveu um modelo com sucessivas pesagens que o levou a deduzir duas fórmulas para encontrar o peso da prata e do ouro na mistura[170].

Nas restantes partes, designadas de "Aerostática" e "Pirostática" − sobre os movimentos que se fazem no ar e por meio dele, e sobre os movimentos causados pelo fogo, respectivamente −, não encontrámos outras ligações com a obra de Arquimedes.

Da breve análise que fizemos a esta obra de meados do século XVII, realçamos que, pelos temas tratados e estudados nestas aulas da "Aula da Esfera", havia a preocupação de transmitir noções científicas com aplicação prática e, entre elas, questões justificadas matematicamente pelos fundamentos de conteúdos arquimedianos. É, sem dúvida, interessante revisitar nesta obra a questão da coroa de Arquimedes e reparar que a versão de Vitrúvio, nesta época, já não colhia adeptos.

Em síntese[171]:

> […] não há dúvida de que este curso de Buseu foi o mais completo tratamento de questões de Mecânica teórica e estática de que há notícia em Portugal até à data em que foi leccionado.

II. Inácio Vieira e o *Tratado de Astronomia*

O Padre Inácio Vieira professou na Companhia de Jesus em 1692 e fez os estudos nos Colégios desta ordem. Saiu com aproveitamento muito distinto, principalmente em matemática que estudou (1699 - 1701) na Universidade de Évora.

Considerado "homem de largos conhecimentos"[172], ensinou matemática entre 1705 e 1708 no Colégio das Artes em Coimbra, mas a partir de 1709 e a seu pedido passou para o Colégio de Santo Antão, onde ficou até final do ano lectivo de 1719/1720.

---

[170] Henrique Buseu, *Tratado de Estática*, pp. 122v-125.

[171] Henrique Leitão (Comissário Científico), Catálogo da Exposição *Sphæra Mundi: A Ciência na Aula da Esfera. Manuscritos Científicos do Colégio de Santo Antão nas Colecções da BNP*, p. 180.

[172] António. Ribeiro dos Santos, dos Santos, «De alguns Mathematicos no Reinado do Senhor D. João V», *in Memórias de Litteratura Portugueza*, Academia Real das Sciencias de Lisboa, Tomo VIII, Parte I, 1812, Lisboa, p. 211.

Deixou os manuscritos de tratados em várias áreas de conhecimento − *Astronomia*, *Hidrografia*, *Dióptrica*, *Catóptrica*, *Pirotécnica*[173].

Iremos analisar as questões arquimedianas que focou no *Tratado de Astronomia* (Lisboa, 1709). É uma obra dividida em três partes − 1ª da Astronomia Elementar, 2ª da Astronomia Prática, 3ª da Astronomia Teórica[174], incluindo no final várias figuras (58) e tabelas.

Figura 23

Para este trabalho interessa-nos, pelo seu conteúdo, a primeira parte: Astronomia Elementar ou da Esfera. No capítulo 1º, Secção 1ª, começou por estabelecer a terminologia a usar no tratado, definiu, por exemplo, círculo, centro e diâmetro do círculo. Para evitar quaisquer dúvidas apresentou no final do tratado as figuras onde "tudo se vê".

Na secção 2 − De algumas propriedades do círculo − apenas dará as que servirão o objectivo desta parte, dando as demonstrações quando explicar a matéria, ao mesmo tempo que referirá os autores que melhor as tratam (fl. 3 do manuscrito). e que se

[173] Henrique Leitão (Comissário Científico), Catálogo da Exposição *Sphæra Mundi: A Ciência na Aula da Esfera. Manuscritos Científicos do Colégio de Santo Antão nas Colecções da BNP*, pp. 209-222.

[174] BNP, Cota do exemplar digitalizado: cod-2111. Versão electrónica em http://purl.pt/14450.

sabiam de os *Elementos*, mas também a partir dos teoremas seleccionados de Arquimedes no livro de Tacquet.

Na secção 3 − Como se poderá medir um círculo − referiu que Arquimedes no tratado *Medida do círculo* tinha tratado o assunto, tal como Clavio e Tacquet".

Continuou com outras propriedades tiradas de Arquimedes. Por exemplo, na propriedade 22:

> a circunferência de qualquer círculo e o seu diâmetro tem proporção tripla com algum excesso; este excesso é menor que $\frac{1}{7}$ do diâmetro, mas maior que $\frac{10}{71}$.

Identificou-a com a proposição 3 de Arquimedes e deu as aproximações, na forma decimal, apresentadas por Ptolomeu, Vieta e Ludolf.

No capítulo 3º − Da definição de esfera, propriedades principais e suas medidas − deu no parágrafo 55 a seguinte propriedade:

> A superfície de qualquer esfera é quadrupla do círculo máximo desta mesma esfera.

O autor diz que se pode encontrar em "Arquimedes, introdução do Livro I da *Esfera e do Cilindro* propriedade 31; Tacquet, *Teoremas seleccionados de Arquimedes* propriedade 24; Clavio L.5 *Geometria Practica* C.5 proposição 2ª". Depois destas referências e de mais algumas propriedades, advertiu, no parágrafo 58, que terminava esse desenvolvimento, afinal queria "não molestar aos curiosos".

Mesmo assim não deixou de indicar, para quem quisesse saber mais, o livro de Tacquet: *Teoremas seleccionados de Arquimedes*; de Clavio: *Geometria Práctica* L.5. C.5. Além destes, referiu ainda o que "Arquimedes nos deu nos Livros que compôs da *Esfera e Cilindro* porque mereceu imortal nome, e dele gravou na sua sepultura aquela prodigiosa proporção, que há entre a esfera, cilindro e pirâmide".

Nas outras partes do tratado, em Astronomia prática ensinou a resolver problemas e em Astronomia Teórica tratou temas complexos, por exemplo, o movimento da Lua.

Este é um texto de um curso muito completo de Astronomia, onde o autor deu as definições e propriedades demonstradas matematicamente, numa linguagem acessível e com preocupações pedagógicas − apresentou a resolução de diversos problemas, indicou as obras de conceituados geómetras jesuítas estrangeiros onde os estudantes poderiam encontrar os assuntos expostos. Estas referências a outros autores parecem mostrar a preocupação em validar as suas afirmações.

III. Manoel de Campos e os *Elementos de Geometria*

O Padre Jesuíta Manoel de Campos terá leccionado nas décadas de 1710 e de 1730 no Colégio de Santo Antão. Membro da Companhia de Jesus é mencionado na historiografia desta época, sobretudo, pela sua actividade como matemático.

Os alunos dos Colégios jesuítas tinham de aprender matemática pelo compêndio de Tacquet. No entanto, Manoel de Campos, por causa de haver na Corte, como o próprio diz, obras com grande diversidade de idiomas e métodos, que causavam confusão em professores e alunos, decidiu fazer uma tradução de Tacquet, introduzindo algumas alterações. O autor tomou a decisão de acrescentar o livro XIII (de Euclides), além de um outro Apêndice.

Escreveu, então, em português, o manual para a Aula da Esfera: *Elementos de geometria plana, e solida, segundo a ordem de Euclides, princepe dos geometras. Accrescentados com tres uteis appendices, o primeiro da logistica das proporções, o segundo dos theoremas selectos de Archimedes, e o terceiro da quadratriz de Dinostrato, para quadrar o circulo, e trisecar o angulo.*

Campos queria servir o ensino da matemática com um trabalho que substituísse as obras de autores estrangeiros e escrever um manual para o Curso Matemático onde registasse o conhecimento adquirido pelo estudo da matemática ao longo dos anos

A obra de Manoel de Campos é um marco na historiografia da Ciência. Representa um momento de viragem no ensino da matemática em Portugal. Publicada em 1735 (Lisboa) e escrita em vernáculo permitiu o acesso a maior número de interessados.

É de realçar que, Campos, optou por não apresentar demonstrações de algumas proposições por considerar que, ou são puros axiomas[175] ou "supérfluas" pelo método que seguiu[176] ou ainda não terem uso algum e serem prolixas[177].

No que respeita aos Apêndices, o matemático português, à semelhança de Tacquet, incluiu no Apêndice II alguns teoremas seleccionados de Arquimedes, pertencentes à Esfera, Cilindro e Pirâmide Cónica. Mas, para o trabalho ficar mais completo, deu na sua obra o Apêndice III sobre a linha quadratriz, uma curva usada na resolução de problemas que ficaram em aberto depois de Euclides − a trissecção do ângulo e a

[175] Manoel de Campos, *Elementos de Geometria Plana e Sólida*, por exemplo proposições VII, VIII, IX, pp. 126-127.

[176] *Ibidem*, por exemplo proposições XX e XXI, p. 133.

[177] *Ibidem*, por exemplo proposições XXVII a XXIX, p. 179.

quadratura do círculo − problemas que continuavam a despertar o interesse e a discussão entre os matemáticos.

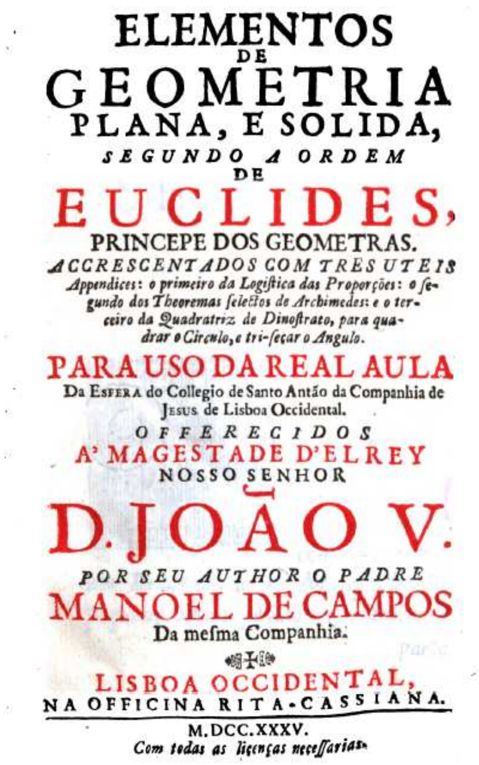

ELEMENTOS
DE
GEOMETRIA
PLANA, E SOLIDA,
SEGUNDO A ORDEM
DE
EUCLIDES,
PRINCEPE DOS GEOMETRAS.
ACCRESCENTADOS COM TRES UTEIS
Appendices: o primeiro da Logiſtica das Proporções: o ſe-
gundo dos Theoremas ſelectos de Archimedes: e o ter-
ceiro da Quadratriz de Dinoſtrato, para qua-
drar o Circulo, e tri-ſecar o Angulo.
PARA USO DA REAL AULA
Da Esfera do Collegio de Santo Antão da Companhia de
Jesus de Lisboa Occidental.
OFFERECIDOS
A' MAGESTADE D'ELREY
NOSSO SENHOR
D. JOÃO V.
POR SEU AUTHOR O PADRE
MANOEL DE CAMPOS
Da meſma Companhia.
LISBOA OCCIDENTAL,
NA OFFICINA RITA-CASSIANA.
M.DCC.XXXV.
Com todas as licenças neceſſarias.

Figura 24

Voltando ao Apêndice II e aos teoremas seleccionados de Arquimedes, destacamos a proposição V com o enunciado seguinte:

> O círculo é igual [em área] ao triângulo, cuja base é a periferia do mesmo círculo e a altura o raio.

Desta proposição são dados dois corolários importantes. Pelo corolário 1 o leitor era informado de que o círculo é igual ao rectângulo de lados iguais ao raio e a metade da circunferência. Esta é uma consequência imediata da relação entre as áreas do triângulo e do rectângulo. No corolário 2 apresentou um enunciado mais interessante, pelo conteúdo e pela forma:

> O círculo está para o quadrado inscrito como metade da circunferência para o diâmetro; e para o [quadrado] circunscrito como a quarta parte da mesma circunferência para o mesmo diâmetro.

Na sequência da proposição V e dos corolários anteriores, surge naturalmente um dos resultados de Arquimedes em a *Medida do círculo*. É a proposição VI (teorema), no livro de Campos, enunciada do seguinte modo:

> A circunferência do círculo contém o diâmetro menos que 3 vezes e $\frac{1}{7}$; e mais que 3 vezes e $\frac{10}{71}$.

No comentário que fez a este resultado, Manoel de Campos, relatou o processo usado por Arquimedes e afirmou ser a demonstração do siracusano igualmente prolixa e engenhosa, como os que usam os processos modernos dependentes da Trigonometria. Por isso, Campos afirmou que tratará esta matéria em *Geometria Práctica* e, na presente obra, deu algumas aproximações célebres, para "a medida da circunferência em partes do diâmetro"[178]. Pelo exposto, Campos parece mais preocupado com questões da didáctica do que em mostrar, à semelhança de Tacquet, todos os cálculos intermédios.

Campos, tal como Tacquet, retomou a aproximação de Arquimedes, que numa linguagem moderna podemos formular deste modo:

> se o diâmetro tiver 7 [partes], a circunferência com 22 [partes] será maior do que a verdadeira; se o diâmetro tiver 71 [partes], a circunferência com 223 [partes] será menor do que a verdadeira.

Seguidamente, explicou que, reduzindo ao mesmo denominador as fracções $\frac{22}{7}$ e $\frac{223}{71}$, tal significa dividir o diâmetro em 497 partes.

Daí ficar claro: a diferença entre a circunferência maior e a menor é de $\frac{1}{497}$. Por outro lado, se tomarmos o inverso das fracções, isto é, $\frac{7}{22}$ e $\frac{71}{223}$, e as reduzirmos ao mesmo denominador (significa dividir ambas as circunferências em 4906 partes), os diâmetros são, respectivamente, 1561 e 1562 partes. Portanto, a diferença entre os respectivos diâmetros é de $\frac{1}{4906}$.

[178] Manoel de Campos, *Elementos de Geometria Plana e Sólidas*, p. 269.

Esta aproximação é uma das mais rigorosas, quando se usa a divisão do diâmetro num número de partes, considerado pequeno se comparado com as restantes aproximações mencionadas.

Ainda neste apêndice foram enunciadas proposições sobre a área e o volume da pirâmide e do prisma, bem como da esfera, do cone e cilindro. Entre estas destacamos a proposição XXIV (teorema):

> A superfície da esfera é quadrupla do círculo máximo da mesma esfera.

Segundo a tradução de Campos, este é um dos resultados de Arquimedes considerado um "admirável teorema", para além de ser "um dos mais ilustres inventos de Arquimedes, merecendo imortal glória entre os Geómetras"[179]. Este e outros teoremas que se seguem são teoremas da obra arquimediana *Sobre a esfera e o cilindro*, cujas demonstrações foram consideradas difíceis e subtis, mas que Tacquet (e Campos) deram por outros métodos eventualmente mais acessíveis.

Não podemos deixar de referir neste nosso trabalho a proposição XXXII (teorema)[180]:

> O cilindro recto está para a esfera inscrita, tanto no volume, como na superfície (total) na razão de 3 para 2.

Este é o teorema de que Arquimedes, segundo Tacquet, tanto se agradou e que mandou gravar a figura correspondente na sua sepultura. Talvez o siracusano tenha ficado admirado com aquela razão por ser verdadeira, quer entre os volumes, quer entre as superfícies dos sólidos, facto por certo admirável e raro se ainda tivermos em conta tratar-se de um valor racional.

Da leitura que fizemos deste manual para a "Aula da Esfera", ficamos com a ideia de que os estudantes e os professores tinham à disposição uma obra escrita numa linguagem acessível para o estudo de um conjunto de temas fundamentais para uma boa preparação matemática. Aspectos didácticos e científicos fazem desta obra um ponto alto do ensino da matemática em Portugal. Do autor, não se duvida que foi um dos mais ilustres mestres do Colégio de Santo Antão pela forma como seleccionou os conteúdos e os adaptou para os estudantes portugueses.

---

[179] Manoel de Campos, *Elementos de Geometria Plana e Sólida*, pp. 290-292.

[180] *Ibidem*, p. 301.

Em suma, no século XVIII, último período do ensino jesuíta em Portugal, a matemática foi leccionada por professores portugueses de bom nível científico. Em Santo Antão, além de Inácio Vieira, o maior destaque vai para o douto professor Manoel de Campos. Entre os tópicos ensinados por estes mestres acham-se referências frequentes a obras ou temas de Arquimedes.

As referidas obras de Manoel de Campos e de André Tacquet foram usadas por dezenas (talvez mesmo centenas) de alunos em Portugal. Estas obras existem, em particular, na Biblioteca Joanina (Universidade de Coimbra), notando-se que o exemplar da obra do matemático português é proveniente do Convento de Santa Cruz de Coimbra, onde os jesuítas também ensinaram alguns cursos e a edição de Tacquet é uma publicada em Amesterdão (1725).

2.3.2. Actividades públicas nos Colégios jesuítas - Teses

Nos Colégios da Companhia todos os alunos, mesmo os que não pertenciam à ordem, tinham de respeitar as regras estabelecidas para as actividades escolares. Uma dessas obrigações consistia em apresentar um trabalho para a conclusão dos cursos. Na forma de opúsculos, redigidos muitas vezes em latim e outros em português, foram publicados desde o século XVI ao início do século XX.

Aparecem com designações diferentes − *Conclusiones, Theses* − e de extensão variável − desde uma única folha até oito ou mais páginas, em formato de grande dimensão[181]. Para a defesa dos trabalhos, organizavam-se "sessões públicas, com grande assistência e aparato"[182], em que os estudantes discutiam alguns tópicos relativos ao que haviam aprendido. Podiam tomar a forma de exercícios, cerimónias, representações teatrais, com a finalidade dos alunos completarem os cursos e serem avaliados dos conhecimentos ministrados

Nessas sessões, presididas por um dos professores dos Colégios, os alunos tinham assim de defender os seus conhecimentos, apresentando as designadas teses ou exercitações. Relativamente à matemática é muito significativo constatar que alguns estudantes focaram temas arquimedianos tendo os Padres jesuítas Inácio Vieira e Manoel de Campos presidido a essas teses.

---

[181] Henrique Leitão e José Eduardo Franco, (Organizadores), *Jesuítas, Ciência e Cultura no Portugal moderno: Obra Selecta de Pe. João Pereira Gomes, SJ*, Esfera do Caos Editores, Lisboa, 2012, p. 167.

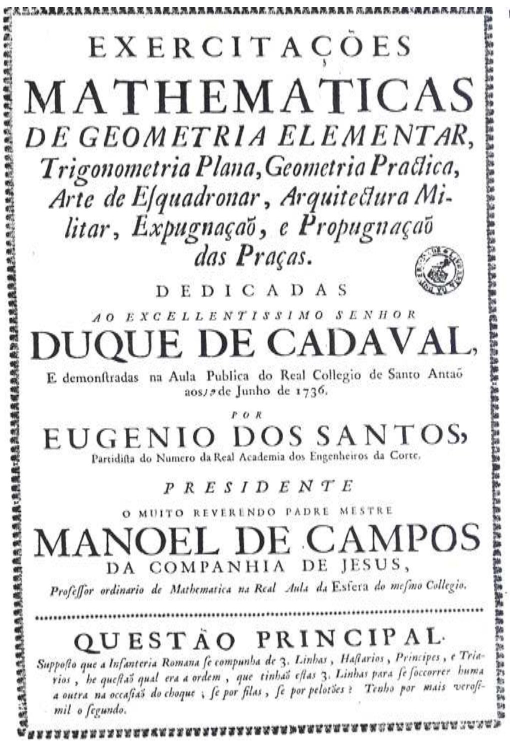
[182] Rómulo de Carvalho, *História do Ensino em Portugal*, p. 354.

Inácio Vieira presidiu à tese com o título *Archimedis sphaera*, apresentada em 1707 numa sessão pública do Colégio de Santo Antão e da qual existe um exemplar na Biblioteca Central da Marinha[183].

Outra tese a que iremos dar destaque é a defendida por Eugénio dos Santos na Aula Pública do Colégio de Santo Antão (19 de Junho de 1736), presidida pelo jesuíta Manoel de Campos, o conceituado professor na "Aula da Esfera".

O trabalho é constituído por sete exercitações, de acordo com o descrito no título: *Exercitações Mathematicas de Geometria Elementar, Trigonometria Plana, Geometria Practica, Arte de Esquadronar, Arquitectura Militar, Expugnação, e Propugnação das Praças*[184].

Da leitura da tese observamos que na Exercitação I, o estudante começa por fazer a apologia da Geometria Elementar enquanto "base e fundamento, não somente da Geometria Teórica e Prática, senão também de toda a Matemática" e que afirma compreender-se nos treze livros de Euclides.



EXERCITAÇÕES
MATHEMATICAS
DE GEOMETRIA ELEMENTAR,
Trigonometria Plana, Geometria Practica,
Arte de Esquadronar, Arquitectura Militar, Expugnaçaõ, e Propugnaçaõ
das Praças.

DEDICADAS
AO EXCELLENTISSIMO SENHOR
DUQUE DE CADAVAL,
E demonstradas na Aula Publica do Real Collegio de Santo Antaõ aos 19 de Junho de 1736.
POR
EUGENIO DOS SANTOS,
Partidista do Numero da Real Academia dos Engenheiros da Corte.
PRESIDENTE
O MUITO REVERENDO PADRE MESTRE
MANOEL DE CAMPOS
DA COMPANHIA DE JESUS,
Professor ordinario de Mathematica na Real Aula da Esfera *do mesmo Collegio.*

QUESTÃO PRINCIPAL.
Supposto que a Infanteria Romana se compunha de 3. Linhas, Hastarios, Principes, e Triarios, he questaõ qual era a ordem, que tinhaõ estas 3. Linhas para se soccorrer huma a outra na occasiaõ do choque; se por filas, se por pelotões? Tenho por mais verosimil o segundo.

Figura 25

[183] Esta tese foi referenciada por J. Pereira Gomes, «Inácio Vieira» *in* Enciclopédia Luso-Brasileira de Cultura, Vol. 18, p. 1094. O documento da Biblioteca tem a Cota RBa5-06-01/30.

[184] BGUC, Ms. 677(1), fls.103-108.

Entre os vários assuntos de Geometria, propõe-se apresentar alguns teoremas de os *Elementos* relacionados com triângulos e outros seleccionados de Arquimedes.

Na sua exposição referiu[185]:

> a quadratura círculo ainda até aqui se não tem achado senão somente por via da aproximação: porém da quadratura do menisco, ou da luneta de Hipócrates, consta manifestamente (e o confessa Aristóteles) que é possível; ou ao menos que a não faz impossível a incomensurabilidade da recta com a curva.

Desta afirmação ficamos a saber que o aluno compreendia algumas das questões matemáticas, naquela altura consideradas delicadas por não estarem resolvidas. Por um lado tinha conhecimento de figuras das quais já se concretizara a quadratura, e por outro lado, cautelosamente, não toma uma posição final sobre a quadratura do círculo, uma vez que, apesar de não ser conhecida, tal não determina a impossibilidade de rectificar a circunferência.

Passou à apresentação de alguns teoremas seleccionados de Arquimedes, começando por enunciar o seguinte

> O diâmetro de qualquer círculo está para a circunferência do mesmo círculo em maior razão, que a de 7 para 22 e em menor, que a 71 para 223 isto é, dividido o diâmetro em 497 partículas, terá a circunferência mais que 1561 e menos que 1562.

O aluno referiu que esta é a "célebre aproximação de Arquimedes, tão necessária para a Geometria Prática, cuja demonstração (segundo a versão de Eutócio) darei a quem a perguntar". Apesar dessa informação, não deixou de dar outra aproximação para aquela razão, mostrando assim que esse problema continuava em discussão.

Estas declarações de Eugénio dos Santos são muito interessantes: deu a noção da delicadeza da demonstração para o público menos familiarizado com o tema, mas proporcionou aos presentes o acréscimo de conhecimento.

A apresentação desta exercitação prosseguiu com teoremas acerca de corpos esféricos, propriedades arquimedianas − justificando-se na escolha − por estes temas serem parcos em Euclides.

Por essa razão enunciou alguns dos teoremas seleccionados de Arquimedes:

> O círculo, cujo raio for meio proporcional entre o lado do cilindro recto, e o diâmetro da sua base, é igual à superfície cilíndrica do mesmo cilindro. O círculo,

[185] BGUC, Ms. 677(1), fl.105.

> cujo raio for meio proporcional entre o lado da pirâmide cónica recta, e o raio da base, é igual à superfície cónica da mesma pirâmide. A superfície da esfera é quadrupla do círculo máximo da mesma esfera; e por consequência é igual ao círculo, que tem por raio o diâmetro da dita esfera.

Prossegue com o enunciado de outros teoremas de Arquimedes, de onde se deduz o modo de medir as zonas e climas da Terra:

> Se se inscrever uma esfera em um cilindro recto, e se dividir a dita esfera com quaisquer planos paralelos à base do dito cilindro, será 1. a superfície cilíndrica igual à superfície esférica. E serão 2. Os segmentos da primeira iguais aos segmentos da segunda.

Terminou esta parte com o teorema de Arquimedes que relaciona, quer a superfície quer o volume, de um cilindro recto com a esfera nele inscrita. Deu o enunciado na seguinte forma:

> Todo o cilindro está para a esfera, nele inscrita, em razão sesquialtera; tanto na superfície, como na corpulência.

O aluno escolheu terminar "esta matéria com este admirável teorema, por ser tão estimado de Arquimedes, que o mandou gravar na lápide da sua sepultura".

Nesta exercitação, a primeira, Eugénio dos Santos revelou elevada sensibilidade a temas arquimedianos, bons conhecimentos de geometria, em particular das proposições que mais celebrizaram o grande matemático siracusano. A todo o conhecimento evidenciado não será alheio, naturalmente, o papel do professor, o prestigiado Padre Manoel de Campos e os seus *Elementos de Geometria Plana e Sólida.*

As restantes partes da tese estão relacionadas com aspectos de fortificações tendo, Eugénio dos Santos, ocupado mais tarde um lugar de destaque na "Aula de Fortificação".

Esta apresentação pública é mais um exemplo de que, por um lado os temas arquimedianos eram estudados e considerados importantes pelos professores jesuítas, dado serem objecto de debate nas teses. Por outro lado, o carácter público das apresentações indica que a assistência teria uma noção, mesmo que vaga, de Arquimedes e dos seus trabalhos. Em suma, existem bons exemplos de teses para nos darem informação sobre o nível de conhecimento de Arquimedes e da sua divulgação no contexto português do século XVIII.

2.4. Ilustrações de conteúdos arquimedianos

Recordemos que a *Ordenação* de Tirso Gonzalez no final do século XVII visava promover o estudo da matemática nos Colégios jesuítas. Este importante documento, do ponto de vista da história da matemática em Portugal, é considerado a "primeira tentativa de reformar o ensino da matemática no nosso país"[186].

A *Ordenação*, no ponto quinto, além de indicar o livro de Tacquet, para uso nas aulas, dizia que

> […] Na escola, ou em qualquer outro lugar destinado às demonstrações deve ser exposto um quadro das figuras principais, maior e mais amplo, que será comum a todos, e a que se deve adaptar um compasso para a demonstração das figuras [...]

O livro de Tacquet incluía desdobráveis com as figuras referenciadas no texto. Os estudos já realizados sobre a actividade científica dos jesuítas em Portugal, levam-nos a conjecturar que esses desdobráveis tenham servido de inspiração para encontrar a forma adequada de cumprir aquelas exigências da *Ordenação*. As figuras estariam afixadas nas paredes das salas e, assim, seriam consultadas no dia-a-dia das aulas e serviriam, também, para serem usadas nos exames.

Colocar as figuras num material duradouro − azulejos cerâmicos − foi a resposta encontrada pelos jesuítas em Coimbra. Designados por azulejos euclidianos, podem ter sido usados, por volta de 1740, no Colégio das Artes[187]. Esses azulejos são objectos inovadores, no conteúdo e na forma, com funções didácticas, possivelmente únicos no mundo.

Preocupações de natureza pedagógica associadas à imaginação artística, conferem aos azulejos didácticos um facto de extrema relevância, quer científica quer artística. Na verdade, transmitem conhecimento e ao mesmo tempo são objectos de assinalável beleza − exemplos da especial importância que os jesuítas sempre atribuíram à expressão artística. A representação de temas matemáticos, em particular, foi uma forma extraordinária de integrar a ciência e a arte. Acreditavam, certamente, que estudantes e público em geral poderiam adquirir conhecimento pelos caminhos complementares da Ciência e da Arte: de um lado, o domínio do conhecimento e por outro lado, a

[186] Henrique Leitão, *in* Catálogo da exposição *Azulejos que ensinam*, MNMC e UC, 2007, pp. 24-25.

[187] Henrique Leitão e Samuel Gessner, «Euclid in tiles: the mathematical azulejos of the Jesuit college in Coimbra», p. 3.

criatividade estética baseada em temas científicos. No contexto educativo essa relação simbiótica entre arte e ciência está bem patente nos Colégios jesuítas de Coimbra, Évora e Lisboa.

Em Coimbra, após a expulsão dos jesuítas, os azulejos terão sido destruídos, mas alguns exemplares, por qualquer razão, foram salvos. Entre os azulejos que se conhecem para ensinar matemática, astronomia, geografia, alguns exemplares encontram-se em instituições públicas − Museu Nacional Machado de Castro, em Coimbra e Museu do Azulejo, em Lisboa −, outros pertencem a particulares. São hoje conhecidos cerca de duas dezenas de azulejos de matemática, completamente identificados e bastante conhecidos, sobretudo depois de uma exposição na Universidade de Coimbra em 2007.

A identificação de cada um dos azulejos euclidianos deve-se à investigação do Professor António Leal Duarte (Universidade de Coimbra), que também identificou o livro que contém as gravuras originais: *Elementa geometriae planae ac solidae quibus accedunt selecta ex Archimede theoremata*, de Tacquet.

Importa, no nosso trabalho, destacar os azulejos que serviram para ensinar conteúdos arquimedianos. Dos azulejos que subsistem hoje, apenas quatro são alusivos aos teoremas de Arquimedes, mas o suficiente para podermos comprovar que tais matérias eram, de facto, ensinadas e estudadas nos Colégios jesuítas.

Da colecção do Museu Nacional Machado de Castro, fazem parte dois desses azulejos, reproduzimos nas imagens das figuras 26 e 27.

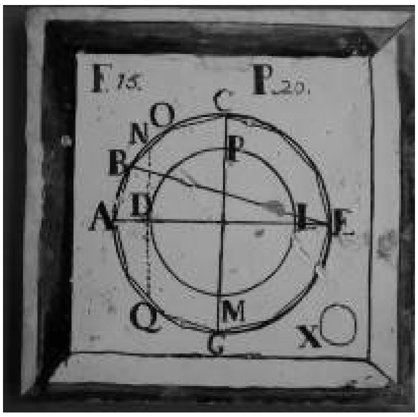


Figura 26

Figura 27

A Figura 26 está relacionada com a proposição 20, um dos Teoremas seleccionados de Arquimedes, com o seguinte enunciado[188]:

> As superfícies cónicas inscritas na esfera fenecem na esfera.

A Figura 27 é uma representação de suporte para a demonstração de várias proposições daquele conjunto de Teoremas: os enunciados das proposições 40 e 41 estabelecem importantes relações entre áreas totais de sólidos, e as proposições 43 e 44 dizem respeito a volumes dos mesmos sólidos[189].

Assim, para a Proposição 40 (Proposição 44):

> A superfície (o volume) da esfera está para a superfície total (o volume) do cone equilátero circunscrito assim como 4 está para 9.

Proposição 41:

> A superfície total do cone equilátero circunscrito a uma esfera é quádrupla da superfície total de um outro cone semelhante inscrito na mesma esfera.

Proposição 43:

> O cone equilátero circunscrito a uma esfera está [em volume] para o cone semelhante inscrito na mesma esfera assim como 8 está para 1.

Nas figuras seguintes apresentamos imagens de mais dois azulejos que ilustram outros teoremas arquimedianos, existentes no Museu do Azulejo.

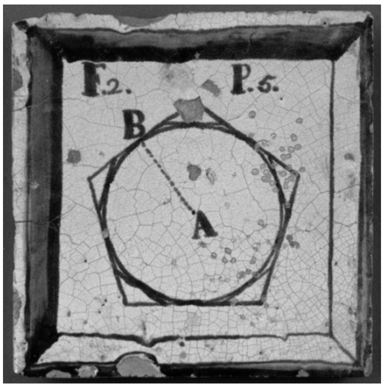


Figura 28

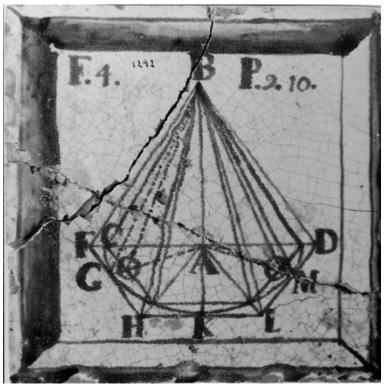


Figura 29

[188] Catálogo da Exposição *Azulejos que ensinam*, Museu Nacional Machado de Castro e Universidade de Coimbra, 2007, p. 68.

[189] *Ibidem*, pp. 70-73.

Na Figura 28, pode ver-se uma imagem que seria o suporte visual para a demonstração da Proposição 5:

> O círculo é igual [em área] ao triângulo cuja base é a periferia do mesmo círculo e a altura é o semidiâmetro.

Este teorema corresponde à célebre proposição 1 do texto arquimediano *Medida do círculo*, e na sua representação reparamos na construção de um polígono circunscrito ao círculo. Como sabemos, a demonstração de Arquimedes segue o método de exaustão, daí ser interessante observar na imagem a construção de um pentágono circunscrito ao círculo.

A imagem reproduzida na Figura 29 serve de apoio às Proposições 9 e 10 dos Teoremas escolhidos de Arquimedes. A representação é curiosa: apenas foi desenhada metade do cone e do cilindro. A outra parte deveria ser imaginada, pois se fosse representada a figura completa, ela ficaria confusa pelo excesso de linhas traçadas.

Com estas proposições demonstra-se como calcular a área de um cone e de um cilindro. Consideremos os respectivos enunciados[190]:

Proposição 9:

> A superfície da pirâmide regular circunscrita a um cone recto é igual [em área] ao triângulo cuja base é o perímetro da base da pirâmide FHLD e a altura é o lado BG do cone. E a superfície da pirâmide regular inscrita num cone recto é igual [em área] ao triângulo cuja base é o perímetro da base da pirâmide e a altura é a perpendicular BO tirada do vértice a qualquer dos lados da base da pirâmide.

Proposição 10:

> As superfícies dos prismas regulares circunscritos ou inscritos num cilindro recto fenecem na superfície do dito cilindro. O mesmo digo das superfícies das pirâmides regulares circunscritas ou inscritas no cone.

Estes azulejos, que terão existido no Colégio das Artes em Coimbra, atestam que naquele período o ensino da matemática teve um forte impulso, encontrando-se na *Ordenação* de Tirso Gonzalez a sua razão determinante. Por outro lado, o conhecimento de Arquimedes na comunidade dos Colégios jesuítas fica bem comprovado.

---

[190] Catálogo da Exposição *Azulejos que ensinam*, Museu Nacional Machado de Castro e Universidade de Coimbra, 2007, p. 66.

É, pois, claro que os jesuítas responderam a questões pedagógicas, através da ligação entre a ciência e a arte. Naquele contexto, certo que foi uma solução pedagógica revolucionária, mas interrompida pela expulsão dos jesuítas.

Podemos ainda encontrar em Portugal outros exemplos, de novo associados a Colégios jesuítas, com enorme relevância científica e artistica e relacionados com temas arquimedianos.

Na actual Universidade de Évora é possível admirar alguns painéis de azulejos que representam vários temas de ciência. Um destes é alusivo à estória do incêndio dos navios romanos durante o cerco de Siracusa (Figura 30). Representa a invenção atribuída a Arquimedes utilizando a reflexão dos raios solares em gigantescos espelhos e referida por Galeno.

Figura 30 − Azulejos alusivos à defesa de Siracusa na Aula de Física da Universidade de Évora (*in* http://www.evora.net/Liceuevora/Fotografias/Azulejos/azulejos.html)

Também no Colégio de Santo Antão (Hospital de S. José), em Lisboa, podemos encontrar vários painéis de azulejos do século XVIII alusivos a questões científicas. Entre eles escolhemos um situado no Salão Nobre alusivo à mesma situação arquimediana: a utilização de espelhos e o reflexo do Sol para incendiar a esquadra inimiga (Figura 31).

Os painéis dos Colégios de Évora e de Lisboa têm características distintas dos azulejos matemáticos do Colégio de Coimbra. Enquanto os primeiros terão tido um papel de divulgação de ciência através da arte, inspirados em estórias que se propagaram ao longo de séculos, os últimos, para o cumprimento de uma metodologia específica, tiveram uma função didáctica suportada na arte, isto é, constituíram sobretudo um genuíno apoio visual para o ensino da matemática e, não tanto, artefactos decorativos[191].

Outra diferença drástica a considerar é que os primeiros continuam nos locais que lhes foram destinados, enquanto os de Coimbra não ocupam mais as "salas de aula" onde terão desempenhado a função didáctica inovadora.

Sem documentação para conhecermos o percurso destes azulejos, conjecturamos que terão existido cerca de duzentos exemplares afixados em local acessível aos estudantes e com boa visibilidade − as suas dimensões (20x20 cm) assim nos fazem pensar − mas, com a expulsão dos jesuítas, terão sido destruídos.

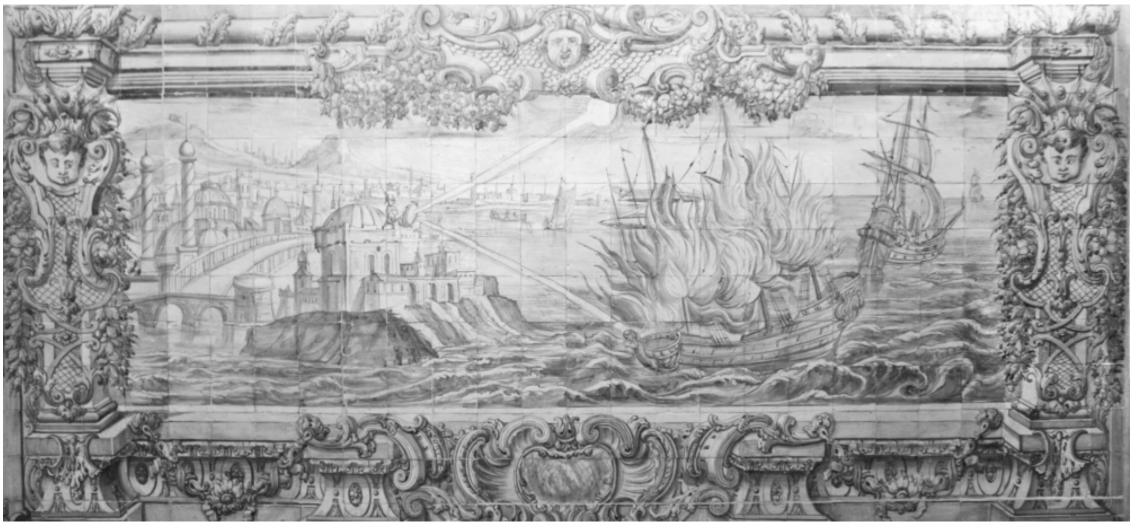


Figura 31 − Painel sobre o episódio do cerco de Siracusa no Colégio de Santo Antão (*in* http://www.monumentos.pt/Site/APP_PagesUser/SIPA.aspx?id=4048)

Contudo, dos que por qualquer razão "sobreviveram", alguns ocupam lugar de destaque em Museus − apresentam-se como documento inquestionável da atenção colocada pelos jesuítas no ensino da matemática.

Em qualquer das situações, os exemplos dados de azulejos e painéis são fortes indícios de que os jesuítas, detentores de uma primorosa formação multidisciplinar, reconheceram na expressão artística um meio de transmitir conhecimento científico. Essa forma de manifestação cultural e científica foi utilizada em benefício da Educação, em particular, nos Colégios jesuítas portugueses, testemunhando assim o ensino de Arquimedes em Portugal, no século XVIII.

[191] Henrique Leitão & Samuel Gessner, «Euclid in tiles: the mathematical azulejos of the Jesuit college in Coimbra», *Mathematische Semesterberichte*, 61.1, 2014, p. 1.

CONCLUSÃO

Arquimedes matemático, engenheiro militar, físico, inventor, são algumas das especificidades reconhecidas a este grande estudioso da Antiguidade. Pelas suas obras sabemos que resolveu importantes questões teóricas de mecânica e hidrostática; por métodos inovadores, desenvolveu e calculou o centro de gravidade de figuras planas e sólidos quaisquer; foi precursor do cálculo infinitesimal, para além de ter encontrado soluções para a defesa da sua cidade de Siracusa.

As obras conhecidas de Arquimedes chegaram até aos nossos dias por três vias: o grego clássico, o bizantino e o árabe. No entanto, devemos salientar o impacto das traduções latinas do árabe e do grego, principalmente durante o século XII. Gerardo de Cremona é um dos tradutores do árabe para o latim, empenhado em dar a conhecer ao Ocidente importantes tratados científicos, entre os quais os de Arquimedes. No século XIII, Guilherme de Moerbeke − o maior de todos os tradutores do grego para o latim − deu novas traduções, tentando assim ultrapassar algumas dificuldades de interpretação, em certas obras.

No Renascimento, os tradutores usaram os trabalhos de Moerbeke para a primeira versão impressa de Arquimedes[192] e assim os eruditos ficaram com os textos de Arquimedes, praticamente todos, disponíveis.

Em 1544 era publicada em Basileia uma obra de enorme importância na história da matemática, com base no "manuscrito A" e importantes correcções de Regiomontano − a *editio princeps*. É um momento crucial na divulgação de Arquimedes.

A difusão do conhecimento tem sido um dos tópicos bastante debatidos na história das ciências. No caso da divulgação das obras de Arquimedes é de grande importância. Como sustenta Koyré, a publicação dos textos arquimedianos com a sua gradual compreensão, representa o trabalho científico no século XVI. Isto é, aquele conhecimento ficou associado à ruptura com o saber medieval e, por conseguinte, ao surgimento da Ciência moderna.

Estudar o problema da difusão de Arquimedes em Portugal, foi o nosso propósito neste trabalho. Não nos foi possível esclarecer o que diz respeito à Idade Média no nosso país. No entanto, no início do século XVI, surgem no panorama nacional, dois

[192] Edward Grant, *Os Fundamentos da Ciência Moderna na Idade Média*, Porto Editora, 2002, pp. 26-31.

divulgadores das obras de Arquimedes que pelas suas contribuições também foram relevantes no plano europeu.

É dessa forma que temos de olhar para as contribuições de D. Francisco de Melo e de Pedro Nunes. Neste ponto, a cultura matemática do século XVI desenvolveu-se em concordância com a da restante Europa pela influência dos dois eruditos, que assimilaram conhecimento do génio helénico, mas que tiveram a clarividência de o transpor para obras singulares.

Francisco de Melo destacou-se pelo comentário ao texto pseudo-arquimediano *De incidentibus in humidis* que poderá ser datado entre 1514 e 1517 e que terá preparado ainda em Paris. É provável que tenha tido conhecimento de outros trabalhos sobre o tema, mas certo é que foi o autor de um manuscrito − *Archimedis de incidentibus in humidis* −, onde substituiu as demonstrações medievais por um comentário relativamente claro. Além disso, deu um passo significativo ao ligar o texto pseudo-arquimediano com o problema da coroa descrito por Vitrúvio[193]. Melo deu novas demonstrações fundamentadas no conhecimento matemático de Euclides, distinguindo-se dos autores medievais. Além disso, teceu considerações sobre hidrostática, facto que o coloca entre os estudiosos do tema.

O texto de Melo, segundo Clagett, é fundamental para compreender o tratado medieval. Esse feito concretizado por um português, no plano nacional, é igualmente decisivo para a correcta interpretação científica do princípio de Arquimedes enunciado na proposição 7 de *Sobre os corpos flutuantes*. O regresso de Melo ao nosso país, terá influenciado a formação científica no plano interno, mas sabemos que entre nós o seu comentário permaneceu manuscrito e teve uma tradução para Francês em 1565.

A influência de Arquimedes na ciência do século XVI, em Portugal, manifesta-se também pelos contributos de Pedro Nunes.

Nunes, fez da explicação rigorosa o lema da sua actividade científica, nunca hesitou em apontar o erro, viesse de onde viesse. Assim, na sua obra *De Erratis Orontii Finaei*, usou os comentários de Eutócio para corrigir Fineu e divulgar, de modo correcto, a proposição 3 da *Medida do círculo*.

[193] Marshall Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, Vol. 3, Part III, p. 1244.

Este facto levou Clagett a colocar Nunes a par de Regiomontano, Maurolico e Commandino, enquanto Fineu é apelidado de "geómetra inapto", quando pretende determinar o valor de π[194].

A obra de Nunes teve ampla divulgação na Europa, dando desse modo o seu próprio contributo para a difusão arquimediana, pelo que merece lugar de destaque entre os estudiosos de Arquimedes na primeira metade do século XVI.

Ao nível institucional, os jesuítas foram responsáveis pela difusão do debate acerca do estatuto científico da matemática em toda a Europa e, sabemos que Clavio, influente jesuíta, terá difundido os conhecimentos de Nunes pela via erudita dos Colégios da Companhia de Jesus.

A importância da Companhia de Jesus fez-se notar pelas publicações dos seus membros e pelos contributos na formação de professores nos seus Colégios. Foram chamados professores para ensinar no nosso país, contribuíram com os seus conhecimentos para criarem um sistema de ensino praticamente inexistente.

No século XVII, o ensino da matemática em Portugal atravessava uma fase complicada e foi necessário intervir. Publicada a *Ordenação* de Tirso, levada muito a sério pelos jesuítas portugueses, registou-se um esforço para a implementar, de modo inovador, o programa prescrito. As obras de influentes mestres foram decisivas na formação matemática em Portugal. Neste sentido, pode dizer-se que os matemáticos jesuítas agiram como um centro para a circulação do conhecimento. Em particular, a obra de Tacquet foi fundamental para a difusão de Arquimedes em Portugal.

Mais tarde, no século XVIII, os Colégios podiam contar com professores competentes, influenciados e formados nas boas práticas científico-pedagógicas dos jesuítas. Manuel de Campos, um dos primeiros cinquenta académicos da Academia Real da História Portuguesa, foi um exemplo notável. Os seus *Elementos de Geometria Plana e Sólida*, uma tradução do livro de Tacquet, contendo os Teoremas seleccionados de Arquimedes, chegou ao conhecimento de milhares de estudantes que então já frequentavam os Colégios jesuítas.

Nem todas as obras de Arquimedes parecem ter tido igual divulgação em Portugal. A *Medida do círculo*, como em toda a Europa, foi muito bem conhecida; a *Quadratura da parábola*, uma das obras de larga divulgação também foi usada por Pedro Nunes; *Sobre a esfera e o cilindro*, com os comentários de Eutócio, teve grande divulgação através

[194] Marshall Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, Vol. 3, Part III, nota 13, p. 1176.

das obras de Tacquet e de Manuel de Campos; *Sobre o equilíbrio dos planos* foi referida no *Tratado de Estática* de Buseu.

É possível concluir que Arquimedes, teve em Portugal seguidores, entre os séculos XVI e XVIII, que souberam interpretar os seus conhecimentos e os transmitiram, concretizando esse desígnio em obras notáveis de repercussão ao melhor nível europeu.

Diremos, em suma, que o conhecimento arquimediano, em Portugal foi difundido, primeiro a título individual, numa época em que o ensino da matemática em instituições era quase inexistente. Mas, ao nível institucional, a "Aula da Esfera", que funcionou ininterruptamente de 1590 a 1759, é irrepreensível na difusão das obras do mais brilhante e inovador físico-matemático da Antiguidade.

BIBLIOGRAFIA

Assis, André Koch Torres, *Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca*, Montreal, 2008.

Authier, Michel, «Arquimedes: o cânone do sábio», direcção de Michel Serres *in Elementos para uma História das Ciências, I. da Babilónia à Idade Média*, Terramar Editores, Lisboa, 1995, pp.121-154.

Bell, E. T., *Los Grandes Matemáticos*, Editorial Losada, S.A., Buenos Aires, s. d., pp. 22-38.

Boyer, Carl, *Historia de la Matemática*, Alianza Universidad Textos, Madrid, 1992.

Buseu, Henrique, *Tratado de Estática*, Lisboa, 1645.

Campos, Manoel de, *Elementos de Geometria Plana e Sólida segundo a ordem de Euclides*, Lisboa, Of. Rita-Cassiana, 1735.

Carvalho, Joaquim de, «Uma obra desconhecida e inédita de Pedro Nunes, *Defensão do tratado da rumação do globo para a arte de navegar*», *in Inedita ac Rediviva*, Vol. IV, Coimbra, 1952.

Clagett, Marshall, «Archimedes» *in Biographical Dictionary of Mathematicians*, Vol. 1, The American Council of Learned Societies, New York, 1991, pp. 85-103.

Clagett, Marshall, *Archimedes in the Middle Ages*, Vol. 1, The University of Wisconsin Press, Madison, 1964.

Clagett, Marshall, *Archimedes in the Middle Ages*, Vol. 3, Part III, The American Philosophical Society, Philadelphia, 1978.

Dijksterhuis, E. J., *Archimedes*, Ejnar Munjsgaard, Copenhagen, 1956.

Devlin, Keith, *Curiosidades Matemáticas para resolver com computadora*, Editorial Limusa, México, 1991, pp. 55-59.

Drachmann, A. G., «How Archimedes expected to move the earth», *Centaurus* 1958, vol.5, nº 3-4, pp. 278-282.

Estrada, Maria Fernanda, e outros, *História da Matemática*, Universidade Aberta, Lisboa, 2000.

Euclides, *Les oeuvres d' Euclide*, Livrairie Scientifique et Technique, Paris, 1993.

Grande Enciclopédia Portuguesa e Brasileira, Vol. XIX, Editorial Enciclopédia, Lisboa.

Gregoire, Michèle, *Histoires de pyramides,* Institut de Recherche pour L'enseignement des Mathematiques, Université Paris-7, Paris, 1991.

Heath, T. L., *A history of greek mathematics*, 2 Volumes, Oxford, 1921.

Heath, T. L., *Archimedes*, Society for Promoting Christian Knowledge, Londres, 1920.

Heath, T. L., *The Works of Archimedes*, Dover Publications, New York, 2002.

Leitão, Henrique (ed.), *Pedro Nunes,1502-1578: novas terras, novos mares e o que mays he: novo ceo e novas estrellas*, Biblioteca Nacional; Lisboa, 2002.

Leitão, Henrique, «Sphæra Mundi» *in Sphæra Mundi: A Ciência na Aula da Esfera. Manuscritos Científicos do Colégio de Santo Antão nas Colecções da BNP*, Catálogo da Exposição, Henrique Leitão (Comissário Científico); Lígia Martins (Coordenação), Lisboa, 2008.

Leitão, Henrique e Franco, José Eduardo, *Jesuítas, Ciência e Cultura no Portugal moderno: Obra Selecta de Pe. João Pereira Gomes, SJ*, Esfera do Caos Editores, Lisboa, 2012.

Leitão, Henrique e Gessner, Samuel, «Euclid in tiles: the mathematical azulejos of the Jesuit college in Coimbra», *in Mathematische Semesterberichte*, 61.1, pp 1-5, 2014.

Leitão, Henrique e Mota, Bernardo (tradução portuguesa), *Archimenidis de incidentibus in humidis cum Francisci de Mello commentariis*, Lisboa, 2014. [Em fase de publicação]

Martins, Roberto A., «Arquimedes e a coroa do rei: problemas históricos», *in Colecção Explorando o Ensino*, Vol. 7 - Física, Brasília: Ministério da Educação, 2005, pp. 181-185.

Knorr, Wilbur R., «Archimedes' Dimension of the Circle: A View of the Genesis of the Extant Text», *in Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 35, Nº. 4, Springer, 1986, pp. 281-324.

Knorr, Wilbur R., «Archimedes and the Spirals: The heuristic background», *in Historia Mathematica* 5, Academic Press, 1978, pp. 43-75.

Nunes, Pedro, *De Erratis Orontii Finaei*, Obras de Pedro Nunes, Vol. III, Academia das Ciências de Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2005.

Nunes, Pedro, *De Arte Atque Ratione Navigandi*, Obras de Pedro Nunes, Vol. IV, Academia das Ciências de Lisboa, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2008.

Netz, Reviel, *The works of Archimedes*, Vol.1, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

Netz, Reviel e Noel, William, *O Codex de Arquimedes*, Edições 70, Lisboa, 2007.

Pereira, Virgínia Soares, «Cícero e a descoberta do túmulo de Arquimedes», *Boletim de Estudos Clássicos* − 44 (Dezembro/2005), pp. 75-84.

Ramos, Anabela Simões, *O "De erratis Orontii Finaei" de Pedro Nunes*, Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática da Universidade de Coimbra, Coimbra, 1998.

Reisch, Gregor, *Margarita philosophica*, Orôncio Fineu (editor), Basileia, 1535. [versão digital do original da Universidade Complutense de Madrid em books.google.pt/books?id=7yqRnSbZiCMC].

Rosendo, Ana Isabel Rodrigues da Silva, *Inácio Monteiro e o Ensino da Matemática em Portugal no Século XVIII*, Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática, Universidade do Minho, Braga, 1996.

Santos, António Ribeiro dos, «Memória da Vida e Escritos de D. Francisco de Melo», *in Memórias de Litteratura Portugueza*, Academia Real das Sciencias de Lisboa, Tomo VII, 1806, Lisboa, pp. 237-249.

Santos, António Ribeiro dos, «Memória da Vida e Escritos de Pedro Nunes», *in Memórias de Litteratura Portugueza*, Academia Real das Sciencias de Lisboa, Tomo VII, 1806, Lisboa, pp. 250-283.

Santos, António Ribeiro dos, «De alguns Mathematicos no Reinado do Senhor D. João V», *in Memórias de Litteratura Portugueza*, Academia Real das Sciencias de Lisboa, Tomo VIII, Parte I, 1812, Lisboa, pp. 210-215.

Santos, Carlos Pereira, Silva, Jorge Nuno, Neto, João Pedro, *A Geometria de Arquimedes + Puzzle Stomachion*, Colecção Jogos com História, Ludus, CHC-UL, SPM, 2007.

Simões, Carlota e Duarte, António Leal (eds.), *Azulejos que Ensinam*, Catálogo de Exposição, Museu Nacional Machado de Castro e Universidade de Coimbra, Coimbra, 2007.

Simões, Carlota «Azulejos com história – a peça que faltava», *in Revista Rua Larga*, nº 31, Universidade de Coimbra, 2011.

Stahl, Saul, *Real Analysis: A Historical Approach*, John Wiley&Sons, Inc., New York, 1999, pp. 1-12 e 217-224.

Stein, Sherman, *Archimedes, What did he do besides cry Eureka?*, The Mathematical Association of America, Washington, 1999.

Struik, Dirk J., *História Concisa das Matemáticas*, Gradiva, Lisboa, 1989.

Vasconcelos, Fernando de Almeida Loureiro e, *História das Matemáticas na Antiguidade*, Edição e coordenação por Augusto J. Franco de Oliveira, Associação Ludus, 2009, pp. 239-265.

Vieira, Inácio, *Tratado de Astronomia*, Lisboa, 1709.

Vitrúvio, *Tratado de Arquitectura*, IST PRESS, Lisboa, 2009.

Zeuthen, Hieronymus Georg, *Histoire des mathématiques dans l'Antiquité et le Moyen âge*, edição francesa anotada por Paul Tannery, Imprimerie Gauthier-Villars, Paris, 1902.